МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А.Х. Шахмейстер

Доказательства неравенств
Математическая индукция
Теория сравнений
Введение в криптографию

Для тех, кто хочет учиться

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.
Ш 32 Доказательства неравенств. Математическая индукция. Теория сравнений. Введение в криптографию / А.Х. Шахмейстер — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2018. — 396 с. : илл. — ISBN 978-5-98712-302-7, ISBN 978-5-91673-127-9, ISBN 978-5-4439-2585-1

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-91673-182-8 («Виктория плюс»)
ISBN 978-5-4439-2585-1 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-302-7 («Петроглиф»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

12+

Посвящается памяти Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие редактора

Современные люди крайне заинтересованы в том, чтобы информация быстро передавалась, а также чтобы надежно хранилась и не попала в ненужные руки. Можно подумать, что это проблема компьютерной эпохи. Но оказывается, эти задачи решались издревле, уже около 4000 лет назад. Как правило, это заботило правителей и военачальников, передававших друг другу секретную информацию, влияющую на исход битв, судьбу империй, жизнь целых народов.

Прочитав эту книгу, вы ознакомитесь с основными принципами и понятиями криптографии – науки о шифрах.

Но для того, чтобы это понять, потребуется немного поработать, изучив соответствующий математический аппарат.

В первой главе мы рассмотрим способы доказательства различных неравенств. Во второй – метод математической индукции. Третья глава начинается со свойств сравнений и делимости и продолжается решением целочисленных (диофантовых) уравнений при помощи алгоритма Евклида.

Наконец, в достаточной степени овладев математическими методами, мы расскажем о некоторых шифрах (вы можете применять их сами!). Уверены, очень интересным будет узнать о связанных с ними магических квадратах и перестановках – да, их тоже можно использовать в создании шифров, – и известных криптографических задачах.

Вдумчиво прочитавший книгу школьник или студент может получить большую пользу, решив 11 практикумов, 8 тренировочных и 3 проверочных работы, а также сможет проверить себя в 6 самостоятельных работах, которые мы сопровождаем ответами и даже решениями.

Мы уверены, что большой интерес вызовет глава об истории криптографии, где рассказывается о применении разнообразных шифров от античности до наших дней.

А. В. Семенов

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программы элективных курсов для учащихся 8-11 классов

Элективный курс «Доказательство неравенств». 28 уроков

Глава 1	
№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий
1–3	Свойства неравенств Практикум 1 № 1, 4, 6, 7
4–6	Методы доказательства неравенств Практикум 2 № 2, 4, 6 Практикум 3 № 1, 3, 6 (а)
7–11	Тренировочная работа 1 Вариант I № 1, 3, 6, 8, 9 Практикум 4 (разные способы доказательств), № 2, 4, 7, 8 Тренировочная работа 2 Вариант I № 1, 2, 3, 6 Вариант II № 3, 5, 7
12–15	Тренировочная работа 3 Вариант I № 1, 4, 5 Вариант II № 1, 2, 5
16–19	Проверочная работа 2 Вариант I № 2, 3, 5 Вариант II № 1, 2, 5
20–24	Проверочная работа 3 Вариант I № 1, 4 Вариант II № 2, 3, 4 Вариант III № 3, 5 Вариант IV № 1, 3, 4
25–28	Обобщение и повторение

Элективный курс «Математическая индукция». 32 урока

Глава 2	
№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–3	Примеры ложной индукции Пример 1 (индукция в суммировании) Пример 2 (индукция в тождестве) Пример 3 (индукция в делимости)
4–6	Практикум 5 (Применение индукции к суммированию) № 1 (а, в, г, д) № 2 (а, б, в, г)
7–10	Применение методов математической индукци к доказательству неравенств Пример 1 Пример 2 Неравенство Бернулли Упражнение 1 № 1 (а, б, в, д, е) № 2, № 3
11–16	Практикум 6 (Более сложные задания) Пример 1, пример 2 Практикум 7 №№ 1, 2 (а), 3 (б, в), 4 (а), 5 (а, б) Самостоятельная работа 1 Вариант I № 2, 4 Вариант II № 1, 2, 4
17–23	Тренировочная работа 4 Вариант I № 1, 3, 4 Вариант II № 2, 3 Вариант III № 2, 3 Вариант IV № 1, 2, 4 Вариант V № 1, 3, 4 Вариант VI № 2, 3, 4
24–26	Числа Фибоначчи Упражнение 2 № 1, 3, 5, 6
27–32	Самостоятельная работа 2 Обобщение и повторение

Элективный курс «Делимость. Сравнение по модулю. Диофантовы уравнения». 25 уроков

Глава 3	
№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–4	Делимость. Теория сравнений Теоремы с доказательствами Упражнения 3 №№ 2, 4, 6, 8 Упражнения 4 №№ 1, 4, 6
5–9	Практикум 8 №№ 1, 3, 4, 6, 8 Тренировочная работа 5 Вариант I №№ 2, 3 Вариант II №№ 1, 3 Самостоятельная работа 3 Вариант I № 2, 4 Вариант II № 1, 3
10–14	Практикум 9 № 1, 2 (а, б), 3, 4, 6, 10 Тренировочная работа 6 Вариант I № 2(а, б), 3 (а, в), 4 Самостоятельная работа 4 Вариант I № 1, 3 Вариант II № 2, 4 Практикум 10 № 1 (а, б, г, е)
15–20	Алгоритм Евклида Диофантовы уравнения Краткая теория Решение линейных уравнений в целых числах (теория) Задача 1, задача 2, задача 3 Тренировочная работа 7 Вариант I № 1, 3 Вариант II № 1 (а, в), 2
21–25	Практикум 11 № 1, 3, 4, 5 Упражнения на решение нелинейных уравнений в целых числах Тренировочная работа 8 № 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10

Элективный курс «Введение в криптографию». 22 урока

Глава 3	
№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–8	Некоторые шифры Задача 1, задача 2 Неинструментальные примеры шифрования и дешифрования информации (текста) Упражнение 5 Упражнение 6 Упражнение 7 Упражнение 8
9–14	Магические квадраты и шифрования Построение магических квадратов Упражнение 9 Упражнение 10 Самостоятельная работа 5
15–18	Другие виды перестановок Самостоятельная работа 6
19–22	Китайская теорема об остатках Шифрование с помощью функциональных зависимостей Краткая историческая справка

Программы разработаны по материалам книги и апробированы на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1 Доказательство неравенств

<u>Определение 1.</u> Число a называется положительным, если его представление на числовой оси правее отметки ноль.

<u>Определение 2.</u> Говорят, что число a больше числа b, если разность чисел $(a - b)$ — число положительное. Записывается $a > b$.

Следствие 1. Любое положительное число больше нуля.

Пусть $b = 0$. Если $(a - b)$ — число положительное, то $a > 0$, что и требовалось доказать.

Свойства неравенств

① Если число a больше числа b и число b больше числа c, то число a больше числа c.

Это свойство называется свойством **транзитивности**, т. е. если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

По условию $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} (a - b) \text{ — число положительное} \\ (b - c) \text{ — число положительное} \end{cases}$.

Значит, $(a - b) + (b - c)$ — число положительное. С другой стороны, $(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$ — число положительное. Следовательно, по определению $a > c$, что и требовалось доказать.

② Если a больше b, то к обеим частям неравенства можно прибавить (или из обеих частей неравенства можно вычесть) одно и то же произвольное число, получится неравенство того же смысла.

Это свойство **монотонности алгебраического сложения**, т. е. если $a > b$, то $a \pm c > b \pm c$.

Так как $a > b$, то $(a - b)$ — число положительное.

По условию

а) $(a - b) + (c - c) = a - b + c - c = (a + c) - (b + c)$ — положительное число, значит $a + c > b + c$.

б) $(a-b)+(c-c)=\underline{a}-\underline{\underline{b}}+\underline{\underline{c}}-\underline{c}=(a-c)-(b-c)$ — положительное число, значит $a - c > b - c$, что и требовалось доказать.

③ Если a больше b, то обе части неравенства можно умножить на одно и то же положительное число, получится неравенство того же смысла.

Это свойство **монотонности умножения на положительное число**, т. е. если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ — (т. е. неравенство $a > b$ имеет тот же смысл, что и неравенство $ac > bc$).

По условию $a > b$ и $c > 0$,

значит $\left|\begin{array}{l} a - b \text{ — положительное число} \\ c \text{ — положительное число} \end{array}\right.$,

тогда $(a - b) \cdot c$ — число положительное,

значит $(a-b)\cdot c = ac - bc$ — число положительное, тогда $ac > bc$, что и требовалось доказать.

Примечание. Очевидно, что можно «договориться» о том, что если число a меньше числа b (разность чисел $(a - b)$ — число отрицательное), то записывать это $a < b$.

Очевидно, что читать эту запись можно как справа налево, т. е. $b > a$, так и слева направо, т. е. $a < b$.

Отметим, что если a — отрицательное число, то $a < 0$.

④ Если a больше b, и c — число отрицательное (т. е. меньше нуля), то обе части неравенства можно умножить на одно и то же отрицательное число, тогда получится неравенство противоположного смысла.

Это свойство **монотонности умножения на отрицательное число**, т. е. если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$ — (т. е. неравенство $ac < bc$ имеет противоположный смысл относительно неравенства $a > b$).

По условию $a > b$ и $c < 0$,

значит $\left| \begin{array}{l} a - b \text{ — число положительное} \\ (-c) \text{ — число положительное} \end{array} \right.$,

тогда $(a-b)\cdot(-c)$ — положительное число.

Следовательно, $(a-b)\cdot(-c) = -ac + bc = bc - ac$, т. е. $bc > ac$ или $ac < bc$, что и требовалось доказать.

Примечание. Аналогично доказывается, что:

а) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;

б) если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

⑤ Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, получится неравенство того же смысла.

Значит если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Так как $\begin{cases} a > b, \text{ то } (a-b) \text{ — число положительное} \\ c > d, \text{ то } (c-d) \text{ — число положительное} \end{cases}$,

то $(a-b)+(c-d)$ — положительное число.

С другой стороны, $(a-b)+(c-d) = a-b+c-d = (a+c)-(b+d)$ — положительное число, т. е. $a + c > b + d$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что если $a<b$ и $c<d$, то $a+c<b+d$.

Примечание. Интересно, можно ли почленно складывать неравенства противоположного смысла?

Рассмотрим несколько примеров:

$$+\begin{array}{c} 5 > 1 \\ \underline{2 < 3} \\ 7 > 4 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} 5 > 1 \\ \underline{2 < 10} \\ 7 < 11 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} 5 > 1 \\ \underline{2 < 6} \\ 7 = 7 \end{array}$$

Вывод: Возможны разные варианты.

Значит, в общем случае **неравенства противоположного смысла почленно складывать нельзя**.

⑥ Неравенства одинакового смысла с положительными правыми и левыми частями можно почленно перемножать, получится неравенство того же смысла.

Значит если $a > b$ и $c > d$, где a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

По условию $\left| \begin{array}{l} a > b \text{ и } c > 0, \text{ тогда } ac > bc \\ c > d \text{ и } b > 0, \text{ тогда } bc > bd \end{array} \right.$

(свойство монотонности умножения на положительное число), т. е. $ac > bc > bd$.

Следовательно, по свойству транзитивности $ac > bd$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Рассмотрим $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{a \cdot b}$.
Так как $a > b > 0$, то $a \cdot b > 0$.
С другой стороны, $b < a$, тогда $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$ или $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Если $a > b$, где $a > 0$, $b > 0$, то $a^n > b^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 4. Если $a > b$, где $a > 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.
Отметим, что следствия 2 и 3 доказываются методом математической индукции. В главе 2 идеи метода математической индукции и его применения рассматриваются подробно.

Практикум 1

Используя свойства неравенств, выясните:

1. В каких промежутках меняется сумма $a+b$, если:

а) $\begin{cases} 3 < a < 10 \\ 7 < b < 20 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 1{,}3 < a < 1{,}4 \\ 2{,}3 < b < 3{,}6 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} -3{,}1 < a < 3{,}4 \\ 0{,}5 < b < 0{,}6 \end{cases}$?

2. Какому промежутку принадлежит алгебраическая сумма: 1. $3a+4b$; 2. $2a-3b$, если:

а) $\begin{cases} 1{,}03 < a < 2{,}97 \\ 0{,}31 < b < 0{,}34 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} -3{,}2 < a < 2{,}3 \\ -6{,}4 < b < -4{,}1 \end{cases}$?

3. В каких пределах меняется $a \cdot b$, если:

а) $\begin{cases} 0{,}6 < a < 0{,}7 \\ 2{,}5 < b < 3{,}5 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \frac{1}{7} < a < \frac{1}{6} \\ 2\frac{1}{3} < b < 2\frac{5}{6} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ -4 < b < -1 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2 < a < 5 \\ -1 < b < 3 \end{cases}$?

4. В каких пределах меняется $\frac{1}{a}$, если:

а) $2{,}5 < a < 8$;

б) $0{,}2 < a < 1{,}2$;

в) $-5 < a < -2$;

г) $-5 < a < 3$?

5. а) В каких пределах меняется $\frac{a}{b}$, если $\begin{cases} 2 < a < 6 \\ 4 < b < 5 \end{cases}$?

Верны ли логические переходы в предложенных далее решениях о границах изменения $\frac{a}{b}$ на определенных промежутках?

б) $\begin{cases} -3 < a < 1 \\ 3 < b < 6 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} -4 < a < 2 \\ -8 < b < -2 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} -2 < a < -1 \\ -4 < b < -3 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 2{,}6 < a < 3{,}2 \\ -1{,}2 < b < 1{,}4 \end{cases}$.

6. Что больше:

а) $\frac{9885}{9886}$ или $\frac{9883}{9884}$; б) $\frac{48\,973}{64\,798}$ или $\frac{48\,975}{64\,804}$?

7. Сравните дроби:

а) $\frac{11\,110}{11\,111}$; $\frac{22\,221}{22\,223}$; $\frac{33\,331}{33\,334}$.

б) $\frac{678\,234}{789\,345}$; $\frac{678\,235}{789\,347}$.

в) $\frac{555\,553}{555\,554}$; $\frac{666\,664}{666\,669}$.

г) $\sqrt[3]{\frac{1993}{1994}}$; $\sqrt[3]{\frac{1994}{1995}}$.

д) $\sqrt[2014]{\frac{2014}{2015}}$; $\sqrt[2014]{\frac{2015}{2016}}$.

Решение практикума 1

1. В каких промежутках меняется сумма $a+b$, если:

а) $\begin{cases} 3 < a < 10 \\ 7 < b < 20 \end{cases}$?

По свойству 5 $3+7 < a+b < 10+20$; $\boxed{10 < a+b < 30}$.

б) $\begin{cases} 1{,}3 < a < 1{,}4 \\ 2{,}3 < b < 3{,}6 \end{cases}$. Тогда $\boxed{3{,}6 < a+b < 5}$.

в) $\begin{cases} -3{,}1 < a < 3{,}4 \\ 0{,}5 < b < 0{,}6 \end{cases}$. Тогда $\boxed{-2{,}6 < a+b < 4}$.

2. Какому промежутку принадлежит алгебраическая сумма:
1. $3a+4b$; 2. $2a-3b$, если:

а) $\begin{cases} 1{,}03 < a < 2{,}97 \\ 0{,}31 < b < 0{,}34 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -3{,}2 < a < 2{,}3 \\ -6{,}4 < b < -4{,}1 \end{cases}$?

1. а) Так как $\begin{cases} 1{,}03 < a < 2{,}97 \\ 0{,}31 < b < 0{,}34 \end{cases}$, то $\begin{cases} 3{,}09 < 3a < 8{,}91 \\ 1{,}24 < 4b < 1{,}36 \end{cases}$ по свойству 3. Тогда $3{,}09+1{,}24 < 3a+4b < 8{,}91+1{,}36$, т. е. $\boxed{4{,}33 < 3a+4b < 10{,}27}$ (по свойству 5).

б) Так как $\begin{cases} -3{,}2 < a < 2{,}3 \\ -6{,}4 < b < -4{,}1 \end{cases}$,

то $\begin{cases} -9{,}6 < 3a < 6{,}9 \\ -25{,}6 < 4b < -16{,}4 \end{cases}$.

Тогда $-9{,}6-25{,}6 < 3a+4b < 6{,}9-16{,}4$,

т. е. $\boxed{-35{,}2 < 3a+4b < -9{,}5}$.

2. а) Так как $\begin{cases} 1{,}03 < a < 2{,}97 \\ 0{,}31 < b < 0{,}34 \end{cases}$, то $\begin{cases} 2{,}06 < 2a < 5{,}94 \\ 0{,}93 < 3b < 1{,}02 \end{cases}$.

Но $-1{,}02 < -3b < -0{,}93$ по свойству 4.

Значит $\begin{cases} 2{,}06 < 2a < 5{,}94 \\ -1{,}02 < -3b < -0{,}93 \end{cases}$,

тогда $\boxed{1{,}04 < 2a-3b < 5{,}01}$.

б) Так как $\begin{cases} -3{,}2 < a < 2{,}3 \\ -6{,}4 < b < -4{,}1 \end{cases}\Bigg|$, то $\begin{cases} -6{,}4 < 2a < 4{,}6 \\ 12{,}3 < -3b < 19{,}2 \end{cases}$ (свойство ④).

Следовательно, $\boxed{5{,}9 < 2a - 3b < 23{,}8}$.

3. В каких пределах меняется $a \cdot b$, если:

а) $\begin{cases} 0{,}6 < a < 0{,}7 \\ 2{,}5 < b < 3{,}5 \end{cases}$?

По свойству ⑥ $0{,}6 \cdot 2{,}5 < a \cdot b < 0{,}7 \cdot 3{,}5$,

т. е. $\boxed{1{,}5 < ab < 2{,}45}$.

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{7} < a < \dfrac{1}{6} \\ 2\dfrac{1}{3} < b < 2\dfrac{5}{6} \end{cases}$?

По свойству ⑥ $\dfrac{1}{7} \cdot 2\dfrac{1}{3} < a \cdot b < \dfrac{1}{6} \cdot 2\dfrac{5}{6}$, т. е. $\boxed{\dfrac{1}{3} < ab < \dfrac{17}{36}}$.

в) $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ -4 < b < -1 \end{cases}$?

Так как $1 < -b < 4$, то $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ 1 < -b < 4 \end{cases}$, то по свойству ⑥ $2 < a(-b) < 12$ или $\boxed{-12 < ab < -2}$.

г) $\begin{cases} 2 < a < 5 \\ -1 < b < 3 \end{cases}$?

Разобьем промежуток $(-1; 3)$ на два:
$(-1; 0)$ и $[0; 3)$.

При $0 \leqslant b < 3$ получим $\underline{0 \leqslant ab < 15}$.

При $-1 < b < 0$, $0 < -b < 1$.

Учитывая, что $2 < a < 5$, получим $0 < -b \cdot a < 5$, т. е. $\underline{-5 < ba < 0}$.

Объединяя оба решения, получим $\boxed{-5 < ab < 15}$.

4. В каких пределах меняется $\frac{1}{a}$, если:

а) $2{,}5 < a < 8$?

По следствию **2** $\frac{1}{2,5} > \frac{1}{a} > \frac{1}{8}$, т. е. $\boxed{\frac{1}{8} < \frac{1}{a} < \frac{2}{5}}$.

б) $0{,}2 < a < 1{,}2$?

По следствию **2** $\boxed{\frac{5}{6} < \frac{1}{a} < 5}$.

в) $-5 < a < -2$?

По свойству ④ $5 > -a > 2$, где $-a > 0$.

Тогда по следствию **2** $\frac{1}{5} < \frac{1}{-a} < \frac{1}{2}$.

Используя свойство ④, получим $\boxed{-\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < -\frac{1}{5}}$.

г) $-5 < a < 3$?

Здесь сразу следствие **2** применить нельзя, поэтому разобьем данный промежуток на два промежутка.

Пусть $0 < \underline{a < 3}$, тогда $\frac{1}{a} > \frac{1}{3}$.

Пусть $-5 < a < 0$, тогда $\underline{5 > -a} > 0$, значит $\frac{1}{-a} > \frac{1}{5}$.

Следовательно, $\frac{1}{a} < -\frac{1}{5}$.

Объединяя ответы, получим, что если $-5 < a < 3$, то $\boxed{\frac{1}{a} < -\frac{1}{5} \quad \text{или} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{3}}$.

5. а) В каких пределах меняется $\frac{a}{b}$, если $\begin{cases} 2 < a < 6 \\ 4 < b < 5 \end{cases}$?

Так как, если $4 < b < 5$, то по следствию **2** $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$.

Учитывая, что неравенства $\begin{cases} 2 < a < 6 \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4} \end{cases}$ одного и того же смысла с положительными правыми и левыми частями, получим по свойству ⑥

$2 \cdot \frac{1}{5} < a \cdot \frac{1}{b} < 6 \cdot \frac{1}{4}$, значит $\boxed{\frac{2}{5} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}}$.

Верны ли логические переходы в предложенных далее решениях о границах изменения $\frac{a}{b}$ на определенных промежутках?

б) $\begin{cases} -3 < a < 1 \\ 3 < b < 6 \end{cases}$.

Так как $3 < b < 6$, то $\frac{1}{6} < \frac{1}{b} < \frac{1}{3}$, значит $\frac{-3}{6} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$, т. е. $\boxed{-\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}}$ или $\frac{a}{b} \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

К сожалению, решение неверное, так как если $\begin{cases} a = -2{,}5 \in (-3; 1) \\ b = 3{,}5 \in (3; 6) \end{cases}$, то $\frac{-2{,}5}{3{,}5} = -\frac{5}{7} \notin \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

в) $\begin{cases} -4 < a < 2 \\ -8 < b < -2 \end{cases}$.

Так как $-8 < b < -2$, то $8 > -b > 2$ $(-b > 0)$, тогда $\frac{1}{8} < \frac{1}{-b} < \frac{1}{2}$, следовательно $\begin{cases} -4 < a < 2 \\ \frac{1}{8} < \frac{1}{-b} < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Перемножим эти неравенства, получим $-\frac{1}{2} < \frac{a}{-b} < 1$ или $\boxed{-1 < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}}$.

Увы, в данном случае решение тоже неверное, так как при $\begin{cases} a = -2 \in (-4; 2) \\ b = -3 \in (-8; -2) \end{cases}$ $\frac{a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \notin \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Попытаемся осмыслить причину неверных решений. Дело в том, что неравенства одинакового смысла можно почленно перемножать, только если правые и левые части неравенств положительные или неотрицательные. А это условие было нарушено.

Вопрос. Неужели нет методов решения задач из пунктов б и в? Оказывается, есть. Рассмотрим такие решения.

б) Итак, пусть $\begin{cases} -3 < a < 1 \\ 3 < b < 6 \end{cases}$.

Разобьем промежуток $(-3; 1)$ на два.

1. Пусть $0 < a < 1$, тогда так как $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ \frac{1}{6} < \frac{1}{b} < \frac{1}{3} \end{cases}$,

то $0 \cdot \frac{1}{6} < \frac{a}{b} < 1 \cdot \frac{1}{3}$, т. е. $\underline{0 < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}}$.

2. Пусть $-3 < a \leqslant 0$, т. е. $3 > -a \geqslant 0$, и $\frac{1}{3} > \frac{1}{b} > \frac{1}{6}$.

Тогда $3 \cdot \frac{1}{3} > -\frac{a}{b} \geqslant 0 \cdot \frac{1}{6}$, т. е. $1 > -\frac{a}{b} \geqslant 0$,

значит $\underline{-1 < \frac{a}{b} \leqslant 0}$.

Объединяя оба решения, получим $\boxed{-1 < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}}$.

$\left(\text{при } \begin{cases} a = -2{,}5 \\ b = 3{,}5 \end{cases} \quad \frac{a}{b} = -\frac{5}{7} \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)\right)$, что верно.

Итак, мы нашли границы изменения дроби $\frac{a}{b}$, используя известные свойства.

в) $\begin{cases} -4 < a < 2 \\ -8 < b < -2 \end{cases}$.

Так как $b < 0$, то $8 > -b > 2$, тогда $\frac{1}{8} < \frac{1}{-b} < \frac{1}{2}$.

В этом случае промежуток $(-4; 2)$ также разобьем на два.

1. Пусть $0 < a < 2$.

   Так как $\frac{1}{8} < \frac{1}{-b} < \frac{1}{2}$ и обе части неравенств положительные, то их можно перемножить, тогда $0 \cdot \frac{1}{8} < \frac{a}{-b} < 2 \cdot \frac{1}{2}$ или $0 < \frac{a}{-b} < 1$, значит $\underline{\frac{a}{b} > -1}$.

2. Пусть $-4 < a \leqslant 0$ или $4 > -a \geqslant 0$.

   Учитывая, что $\frac{1}{2} > \frac{1}{-b} > \frac{1}{8}$, можно оба неравенства почленно перемножить.

   $4 \cdot \frac{1}{2} > -a \cdot \frac{1}{-b} \geqslant 0 \cdot \frac{1}{2}$, т. е. $\underline{2 > \frac{a}{b} \geqslant 0}$.

Объединяя два решения, получим, что $\boxed{-1 < \frac{a}{b} < 2}$.

$\left(\text{если } \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \in (-1; 2), \text{ что верно}\right)$.

Отметим, что если границы изменения параметра a разных знаков, например, $-3 < a < 10$, для равносильности преобразований, связанных с произведением или частным, всегда необходимо разделение на два промежутка: или $(-3; 10) = (-3; 0] \cup (0; 10)$, или $(-3; 10) = (-3; 0) \cup [0; 10)$, аналогично и для b.

г) $\begin{cases} -2 < a < -1 \\ -4 < b < -3 \end{cases}$.

Используя свойство 4, получим $\begin{cases} 2 > -a > 1 \\ 4 > -b > 3 \end{cases}$.

Следовательно, $\frac{1}{4} < \frac{1}{-b} < \frac{1}{3}$,

значит тогда $\begin{cases} 2 > -a > 1 \\ \frac{1}{3} > -\frac{1}{b} > \frac{1}{4} \end{cases}$,

следовательно, $\frac{2}{3} > \frac{-a}{-b} > \frac{1}{4}$, т. е. $\boxed{\frac{1}{4} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}}$.

д) $\begin{cases} 2{,}6 < a < 3{,}2 \\ -1{,}2 < b < 1{,}4 \end{cases}$.

Разобьем промежуток $(-1{,}2; 1{,}4)$ на два: $(0; 1{,}4)$ и $(-1{,}2; 0)$ ($b \neq 0$, так как b — знаменатель).

1. Пусть $0 < b < 1{,}4$, тогда $\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{1{,}4}$,

   т. е. $\dfrac{1}{b} > \dfrac{5}{7}$ и $a > 2{,}6$.

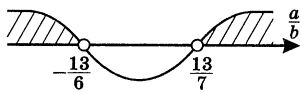
   Значит $\dfrac{a}{b} > \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{26}{10}$. Следовательно, $\underline{\dfrac{a}{b} > \dfrac{13}{7}}$.

2. $-1{,}2 < b < 0$ или $1{,}2 > -b > 0$, тогда $\dfrac{1}{-b} > \dfrac{1}{1{,}2} = \dfrac{5}{6}$.

   Значит $\begin{cases} \dfrac{1}{-b} > \dfrac{5}{6} \\ a > 2{,}6 \end{cases}$, т. е. $\dfrac{a}{-b} > \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{26}{10} = \dfrac{13}{6}$,

   следовательно, $\underline{\dfrac{a}{b} < -\dfrac{13}{6}}$.

Объединяя два решения, получим



Итак, $\dfrac{a}{b} \in \left(-\infty; -\dfrac{13}{6}\right) \cup \left(\dfrac{13}{7}; \infty\right)$.

Примечание 1

а) Пусть $1,8 < a < 2,4$, тогда по свойству ⑥ $3{,}24 < a^2 < 5{,}76$.

б) $\dfrac{1}{2{,}4} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{1{,}8}$ по следствию **2**, следовательно, по свойству ⑥ $\dfrac{3{,}24}{2{,}4} < \dfrac{a^2}{a} < \dfrac{5{,}76}{1{,}8}$.

в) Тогда $1{,}35 = \dfrac{3{,}24}{2{,}4} < \dfrac{a^2}{a} < \dfrac{576}{180} = \dfrac{64}{20} = \dfrac{16}{5} = 3{,}20$.

Значит $\boxed{1{,}35 < \dfrac{a^2}{a} < 3{,}20}$.

Очевидно, что границы другие, значит $\boxed{\dfrac{a^2}{a} \neq a}$.

Вывод. При поисках границ изменения того или иного выражения **действие сокращения дроби недопустимо**, так как не основано на свойствах неравенств ①–⑥, доказанных ранее.

Примечание 2. Пусть $\begin{cases} 1{,}3 < a < 1{,}5 \\ 2{,}1 < b < 2{,}4 \end{cases}.$

Выясните, в каких промежутках изменяется произведение $(2a - b) \cdot (2a + b)$.

а) 1. $\begin{cases} 2{,}6 < 2a < 3 \\ -2{,}4 < -b < -2{,}1 \end{cases}$, тогда $0{,}2 < 2a - b < 0{,}9$.

2. $\begin{cases} 2{,}6 < 2a < 3 \\ 2{,}1 < b < 2{,}4 \end{cases}$, тогда $4{,}7 < 2a + b < 5{,}4$.

3. $\begin{cases} 0{,}2 < 2a - b < 0{,}9 \\ 4{,}7 < 2a + b < 5{,}4 \end{cases}$,

тогда $0{,}2 \cdot 4{,}7 < (2a - b) \cdot (2a + b) < 0{,}9 \cdot 5{,}4$

т. е. $\boxed{0{,}94 < (2a - b)(2a + b) < 4{,}86}$.

б) Попробуем использовать другой способ.

1. $1{,}69 < a^2 < 2{,}25$, тогда $6{,}76 < 4a^2 < 9$.
2. $4{,}41 < b^2 < 5{,}76$, тогда $-5{,}76 < -b^2 < -4{,}41$.
3. $\begin{cases} 6{,}76 < 4a^2 < 9 \\ -5{,}76 < -b^2 < -4{,}41 \end{cases}$, тогда $1 < 4a^2 - b^2 < 4{,}59$.

Очевидно, что границы изменения другие. Значит в данном случае $(2a + b)(2a - b) \neq 4a^2 - b^2$, так как при этом изменяются границы исходного выражения по причинам, указанным в примечании **1**. В данном случае произведение $(2a - b) \cdot (2a + b)$ изменялось в пределах промежутка $\boxed{(0{,}94; 4{,}86)}$ при $a \in (1{,}3; 1{,}5)$ и $b \in (2{,}1; 2{,}4)$.

Вывод. При нахождении границ **недопустимо использовать свойство дистрибутивности**, в том числе формулы сокращенного умножения, а также любые действия, не основанные на свойствах неравенств ①–⑥.

6. Что больше:

а) $\dfrac{9885}{9886}$ или $\dfrac{9883}{9884}$?

Представим данные числа в виде:
$\dfrac{9885}{9886}=1-\dfrac{1}{9886}$; $\dfrac{9883}{9884}=1-\dfrac{1}{9884}$.

Так как $\dfrac{1}{9884}>\dfrac{1}{9886}$, то $-\dfrac{1}{9884}<-\dfrac{1}{9886}$, значит $1-\dfrac{1}{9984}<1-\dfrac{1}{9886}$, т. е. $\dfrac{9885}{9886}>\dfrac{9883}{9884}$.

б) $\dfrac{48\,973}{64\,798}$ или $\dfrac{48\,975}{64\,804}$?

Обозначим $48\,973=x$, тогда $48\,975=x+2$, следовательно, $64\,798=y$, тогда $64\,804=y+6$.

$$\frac{48\,973}{64\,798}-\frac{48\,975}{64\,804}=\frac{x}{y}-\frac{x+2}{y+6}=\frac{xy+6x-yx-2y}{y(y+6)}=$$
$$=\frac{6x-2y}{y(y+6)}=\frac{2(3x-y)}{y(y+6)}.$$

Так как очевидно, что $3\cdot 48\,973>64\,798$, то $3x>y$, значит $\dfrac{48\,973}{64\,798}>\dfrac{48\,975}{64\,804}$.

7. Сравните дроби:

а) $\dfrac{11\,110}{11\,111}$; $\dfrac{22\,221}{22\,223}$; $\dfrac{33\,331}{33\,334}$.

Представим дроби $\dfrac{11\,110}{11\,111}=1-\dfrac{1}{11\,111}$;
$\dfrac{22\,221}{22\,223}=1-\dfrac{2}{22\,223}$; $\dfrac{33\,331}{33\,334}=1-\dfrac{3}{33\,334}$.

Так как $\dfrac{2}{22\,223}<\dfrac{2}{22\,222}=\dfrac{1}{11\,111}$, то $\dfrac{-2}{22\,223}>-\dfrac{1}{11\,111}$,
значит $1-\dfrac{2}{22\,223}>1-\dfrac{1}{11\,111}$, т. е. $\dfrac{22\,221}{22\,223}>\dfrac{11\,110}{11\,111}$.

Значит, $1-\dfrac{3}{33\,334}>1-\dfrac{1}{11\,111}$, т. е. $\dfrac{33\,331}{33\,334}>\dfrac{11\,110}{11\,111}$.

Положим $11\,111=x$, тогда $\begin{cases} 22\,221=2x-1\\ 22\,223=2x+1\\ 33\,331=3x-2\\ 33\,334=3x+1\end{cases}$,

значит $\dfrac{33\,331}{33\,334}-\dfrac{22\,221}{22\,223}=\dfrac{3x-2}{3x+1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}=$

$=\dfrac{6x^2-x-2-6x^2+x+1}{(3x+1)(2x+1)}=-\dfrac{1}{(3x+1)(2x+1)}<0,$

следовательно, $\boxed{\dfrac{22\,221}{22\,223}>\dfrac{33\,331}{33\,334}>\dfrac{11\,110}{11\,111}}$.

б) $\dfrac{678\,234}{789\,345}$; $\dfrac{678\,235}{789\,347}$.

Представим дроби в виде $\begin{cases} \dfrac{678\,234}{789\,345}=1-\dfrac{111\,111}{789\,345}\\ \dfrac{678\,235}{789\,347}=1-\dfrac{111\,112}{789\,347}\end{cases}$.

Положим $\begin{cases} 678\,234=x\\ 789\,345=y\end{cases}$, тогда $\begin{cases} 678\,235=x+1\\ 789\,347=y+2\end{cases}$.

Рассмотрим $\dfrac{678\,234}{789\,345}-\dfrac{678\,235}{789\,347}=\dfrac{x}{y}-\dfrac{x+1}{y+2}=$

$=\dfrac{xy+2x-yx-y}{y(y+2)}=\dfrac{2x-y}{y(y+2)}.$

Очевидно, что $2\cdot 678\,234>789\,345$, т. е. $2x-y>0$

значит $\boxed{\dfrac{678\,234}{789\,345}>\dfrac{678\,235}{789\,347}}$.

в) $\dfrac{555\,553}{555\,554}$; $\dfrac{666\,664}{666\,669}$.

Положим $\begin{cases} 555\,553=x\\ 666\,664=y\end{cases}$, тогда $\begin{cases} 555\,554=x+1\\ 666\,669=y+5\end{cases}$,

значит $\dfrac{555\,553}{555\,554}-\dfrac{666\,664}{666\,669}=\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{y}{y+5}=$

$=\dfrac{xy+5x-yx-y}{(x+1)(y+5)}=\dfrac{5x-y}{(x+1)(y+5)}.$

Очевидно, что $5x-y>0$, значит $\boxed{\dfrac{555\,553}{555\,554}>\dfrac{666\,664}{666\,669}}$

г) $\sqrt[3]{\dfrac{1993}{1994}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1994}{1995}}$.

Представим дроби в виде $\begin{cases} \dfrac{1993}{1994} = 1 - \dfrac{1}{1994} \\ \dfrac{1994}{1995} = 1 - \dfrac{1}{1995} \end{cases}$.

Так как $\dfrac{1}{1994} > \dfrac{1}{1995}$, то $-\dfrac{1}{1994} < -\dfrac{1}{1995}$, значит $1 - \dfrac{1}{1994} < 1 - \dfrac{1}{1995}$, тогда $\dfrac{1993}{1994} < \dfrac{1994}{1995}$.

Так как извлечение корня третьей (нечетной) степени не меняет смысла неравенств, то

$$\sqrt[3]{\frac{1993}{1994}} < \sqrt[3]{\frac{1994}{1995}}.$$

Отметим, что $y = \sqrt[2k-1]{x}$ — возрастающая функция.

д) $\sqrt[2014]{\dfrac{2014}{2015}}$; $\sqrt[2014]{\dfrac{2015}{2016}}$.

Положим $2014 = x$,

тогда $2015 = x + 1$, $2016 = x + 2$.

Значит $\dfrac{2014}{2015} - \dfrac{2015}{2016} = \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x+1}{x+2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1}{(x+1)(x+2)} = -\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} < 0$,

т. е. $\dfrac{2014}{2015} < \dfrac{2015}{2016}$.

Учитывая, что извлечение корня четной степени из обеих положительных частей неравенства не меняет его смысла, получим $\sqrt[2014]{\dfrac{2014}{2015}} < \sqrt[2014]{\dfrac{2015}{2016}}$.

Отметим, что $y = \sqrt[2k]{x}$, где $k \in \mathbb{N}$, — функция, которая на $[0; \infty)$ возрастает, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Некоторые методы доказательства неравенств

Рассмотрим различные методы доказательства неравенства $\dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, где $a, b \geqslant 0$.

Анализ

$\dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, тогда

по следствию 3 $(n=2)$

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Используя свойство ③, умножим обе части неравенства на 4.

$a^2+2ab+b^2 \leqslant 2\left(a^2+b^2\right)$.

По свойству ②

$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$,

т. е. $(a-b)^2 \geqslant 0$ — истина.

Синтез

Пусть $(a-b)^2 \geqslant 0$ — истинно, т. е. $a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$.

Используя свойство ②, прибавим к обеим частям неравенства $(a+b)^2$, тогда $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$.

Разделим обе части неравенства на 4 (свойство ③) или умножим на $\dfrac{1}{4}$.

$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

По следствию 4

$\dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Обычно *анализ* проводится для того, чтобы, используя свойства неравенств и следствий из них, путем верных логических переходов прийти к абсолютно истинному утверждению. Далее, исходя из истинного утверждения, идя в «обратном» порядке путем верных логических рассуждений, приходим к доказательству исходного утверждения. Такой способ доказательства называется *аналитико-синтетическим.*

Ниже приведены примеры известных средних величин. Далее будут рассмотрены алгебраические доказательства во взаимоотношениях между ними с позиции неравенств.

$\dfrac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое чисел a и b	$\sqrt{ab}$ — среднее геометрическое чисел a и b
$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ — среднее квадратичное чисел a и b	$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ — среднее гармоническое чисел a и b

Напомним, что если из истинности утверждения A следует истинность утверждения B, то говорят, что истинность утверждения A достаточна для истинности утверждения B, а истинность утверждения B необходима для истинности утверждения A.

Записывается это так: $(A$ — И$) \Rightarrow (B$ — И$)$.

Если же при этом

$(B$ — И$) \Rightarrow (A$ — И$)$, т. е. $(A$ — И$) \Leftrightarrow (B$ — И$)$,

то говорят, что данные утверждения равносильны.

Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. М. — СПб., 2014. С. 114–115.

Практикум 2

Доказите:

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a, b \geqslant 0$.
2. $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$, где $a, b > 0$.
3. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$, где $a, b > 0$.
4. $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$.
5. $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, где $a, b, c \geqslant 0$.
6. $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x} \geqslant x+y+z$, где $x, y, z > 0$.
7. $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2 \geqslant (a^3+b^3)^2$.

Решение практикума 2

Докажите:

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a, b \geqslant 0$.

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\ (a, b \geqslant 0) \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0 \text{ — истина.}$$

2. $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$, где $a, b > 0$.

Умножим обе части неравенства на $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\sqrt{ab}}$ (свойство 3).

Тогда $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\sqrt{ab}} \leqslant \sqrt{a\cdot b}\cdot\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{ab}} \leqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$, что и требовалось доказать

$\left(\text{если } \dfrac{k}{x} < y, \text{ где } x > 0,\ y > 0, \text{ то } \dfrac{k}{y} < x\right)$.

Примечание 1. Таким образом, мы доказали известную цепочку неравенств: $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Более подробное доказательство этих неравенств с позиций геометрии дано в книге Шахмейстер А. Х. Геометрические задачи на экзаменах. Часть I. Планиметрия. СПб. — М., 2015. С. 239–245.

Примечание 2. Отметим, что $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, есть известная теорема О. Коши (при $n = 2$):
$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$,
где $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. Доказательство будет рассмотрено в главе 2 данной книги (с. 152).

3. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$, где $a, b > 0$.

По теореме О. Коши $\begin{cases} a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}} \end{cases}$,

тогда по свойству ⑥ $(a+b)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqslant 2\cdot\sqrt{ab}\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}} = 4.$

Следовательно, $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$,

что и требовалось доказать.

4. $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$.

$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geqslant 2xy + 2xz + 2yz \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geqslant 0$ — истина.
Значит, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$ — истина, что и требовалось доказать.

5. $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, где $a, b, c \geqslant 0$.

Так как по теореме О. Коши $\begin{cases} a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \\ b + c \geqslant 2\sqrt{bc} \\ a + c \geqslant 2\sqrt{ac} \end{cases}$,

то $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, что и требовалось доказать.

6. $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}\geqslant x+y+z$, где $x,y,z>0$.

По теореме О. Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{xy}{z}\cdot\dfrac{xz}{y}}=\sqrt{x^2}=x \\ \dfrac{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{xy}{z}\cdot\dfrac{yz}{x}}=\sqrt{y^2}=y\cdot \\ \dfrac{\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{xz}{y}\cdot\dfrac{yz}{x}}=\sqrt{z^2}=z \end{cases}$$

Складывая почленно, по свойству ⑤ получим

$\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}\geqslant x+y+z$, где $x,y,z>0$,

что и требовалось доказать.

7. $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geqslant(a^3+b^3)^2\geqslant(a^3+b^3)^2$.

$(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geqslant(a^3+b^3)^2 \Leftrightarrow$

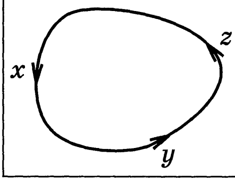
$\Leftrightarrow \underline{a}^6+a^4b^2+a^2b^4+\underline{\underline{b}}^6\geqslant\underline{a}^6+2a^3b^3+\underline{\underline{b}}^6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4b^2-2a^3b^3+a^2b^4\geqslant 0\Leftrightarrow a^2b^2(a^2-2ab+b^2)\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a-b)^2\geqslant 0$ — истина, что и требовалось доказать.

Симметрические многочлены и неравенства

<u>Определение</u>. Симметрическими многочленами называются многочлены с несколькими неизвестными, которые не изменяются при замене, например: x на y, y на z, x на z, или при другой круговой комбинации.



Обозначим $\sigma_1 = x + y + z$; $\sigma_2 = xy + xz + yz$; $\sigma_3 = xyz$.

Отметим, что это простейшие симметрические многочлены с тремя неизвестными.

Теорема. Любой симметрический многочлен можно представить как алгебраическую комбинацию простейших симметрических многочленов.

Более подробно см. Шахмейстер А. Х. Системы уравнений. СПб. — М., 2014. С. 65, 90–92.

Практикум 3

Докажите, что для определенных выше многочленов:

1. $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$;

2. $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1 \cdot \sigma_3$;

3. $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 9 \cdot \sigma_3$;

4. $\sigma_1^3 \geqslant 27\sigma_3$;

5. $\sigma_2^3 \geqslant 27 \cdot \sigma_3^2$.

6. В каких пределах изменяются выражения:

а) $\dfrac{3a-b}{2a+b}$, где $\begin{cases} 2 < a < 5 \\ 3 < b < 4 \end{cases}$;

б) $\dfrac{2a-b}{3a-2b}$, где $\begin{cases} 1{,}6 < a < 2{,}4 \\ 2{,}5 < b < 2{,}8 \end{cases}$?

Решение практикума 3

Докажите, что для определенных выше многочленов:

1. $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$.

Нужно доказать, что $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+xz+zy)$.

$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+xz+zy) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz \geqslant 3xy+3xz+3zy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+zy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2 \geqslant 2xy+2xz+2zy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geqslant 0$ — истина.

Значит $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$ — истина, что и требовалось доказать.

2. $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1 \cdot \sigma_3$.

Нужно доказать, что $(xy+xz+yz)^2 \geqslant 3(x+y+z)xyz$.

$(xy+xz+yz)^2 \geqslant 3(x+y+z)xyz \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2yz+2y^2xz+2z^2xy \geqslant$$
$$\geqslant 3x^2yz+3y^2xz+3z^2xy \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \geqslant x^2yz+y^2xz+z^2xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-2x^2yz-2y^2xz-2z^2xy \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2y^2-2x^2yz+x^2z^2)+(x^2y^2-2y^2xz+y^2z^2)+$$
$$+(x^2z^2-2z^2xy+y^2z^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (xy-xz)^2+(xy-yz)^2+(xz-yz)^2 \geqslant 0$ — истина.

Значит $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1 \cdot \sigma_3$ — истина, что и требовалось доказать.

3. $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 9 \cdot \sigma_3$.

Нужно доказать, что $(x+y+z)\cdot(xy+xz+yz) \geqslant 9xyz$.

$$\begin{cases} \sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2 \\ \sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1 \cdot \sigma_3 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \geqslant 9 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 9 \cdot \sigma_3$ — истина.

4. $\sigma_1^3 \geqslant 27\sigma_3$.

Нужно доказать, что $(x+y+z)^3 \geqslant 27xyz$.

Так как $\begin{cases} \sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2 \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 9\sigma_3 \end{cases}$,

то $\sigma_1^2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 3 \cdot \sigma_2 \cdot 9 \cdot \sigma_3 \Leftrightarrow \sigma_1^3 \geqslant 27\sigma_3$ — истина, что и требовалось доказать.

5. $\sigma_2^3 \geqslant 27 \cdot \sigma_3^2$.

Нужно доказать, что $(xy+xz+yz)^3 \geqslant 27x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$, если $x, y, z \geqslant 0$.

Так как $\begin{cases} \sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1 \cdot \sigma_3 \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 9\sigma_3 \end{cases}$, то $\sigma_2^2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \geqslant 3 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 \cdot 9\sigma_3$,

тогда $\sigma_2^3 \geqslant 27 \cdot \sigma_3^2$ — истина, что и требовалось доказать.

6. В каких пределах изменяются выражения?

а) $\dfrac{3a-b}{2a+b}$, где $\begin{cases} 2 < a < 5 \\ 3 < b < 4 \end{cases}$.

1. По условию для $3a-b$ $\begin{cases} 6 < 3a < 15 \\ -4 < -b < -3 \end{cases}$, следовательно $2 < 3a-b < 12$.

2. Для $2a+b$ $\begin{cases} 4 < 2a < 10 \\ 3 < b < 4 \end{cases}$, тогда $7 < 2a+b < 14$. Следовательно, $\dfrac{1}{14} < \dfrac{1}{2a+b} < \dfrac{1}{7}$.

3. $\begin{cases} 2 < 3a-b < 12 \\ \dfrac{1}{14} < \dfrac{1}{2a+b} < \dfrac{1}{7} \end{cases}$, тогда $\boxed{\dfrac{1}{7} < \dfrac{3a-b}{2a+b} < \dfrac{12}{7}}$.

б) $\dfrac{2a-b}{3a-2b}$, где $\begin{cases} 1{,}6 < a < 2{,}4 \\ 2{,}5 < b < 2{,}8 \end{cases}$.

Для $\dfrac{2a-b}{3a-2b}$ необходимо выяснить границы изменения.

1. $\begin{cases} 3{,}2 < 2a < 4{,}8 \\ -2{,}8 < -b < -2{,}5 \end{cases}$, тогда $0{,}4 < 2a - b < 2{,}3$.

2. $\begin{cases} 4{,}8 < 3a < 7{,}2 \\ -5{,}6 < -2b < -5 \end{cases}$, тогда $-0{,}8 < 3a - 2b < 2{,}2$.

Разобьем промежуток $(-0{,}8; 2{,}2)$ на два.

3. Пусть $0 < 3a - 2b < 2{,}2$, тогда $\dfrac{1}{3a-2b} > \dfrac{1}{2,2} = \dfrac{5}{11}$.

Итак, $\begin{cases} 2a - b > 0{,}4 \\ \dfrac{1}{3a-2b} > \dfrac{5}{11} \end{cases}$, значит $\dfrac{2a-b}{3a-2b} > \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{5}{11} = \dfrac{2}{11}$,

т. е. $\dfrac{2a-b}{3a-2b} > \dfrac{2}{11}$.

4. Пусть $-0{,}8 < 3a - 2b < 0$, значит $0{,}8 > 2b - 3a > 0$, следовательно, $-(3a - 2b) > 0$;

$\dfrac{1}{-(3a-2b)} > \dfrac{1}{0{,}8} = \dfrac{5}{4}$.

Итак, $\begin{cases} 0{,}4 < 2a - b \\ \dfrac{5}{4} < \dfrac{1}{-(3a-2b)} \end{cases}$. Тогда

$\dfrac{2a-b}{-(3a-2b)} > \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{2}$, следовательно, $\dfrac{2a-b}{3a-2b} < -\dfrac{1}{2}$.

Объединяя два решения, получим

$\boxed{\dfrac{2a-b}{3a-2b} < -\dfrac{1}{2} \quad \text{или} \quad \dfrac{2a-b}{3a-2b} > \dfrac{2}{11}}$.

Тренировочная работа 1

Вариант I

Докажите:

1. $\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2}\geqslant\sqrt{(a+b)(c+d)}$, где $a,b,c,d\geqslant 0$.

2. $a^2m+b^2n\geqslant 2ab$, если $m\cdot n=1$ и $a\cdot b\geqslant 0$.

3. $(a^3+b)\cdot(a+b^3)\geqslant 4a^2b^2$, где $a,b\geqslant 0$.

4. $b(a^2+1)+a(b^2+1)\geqslant 4ab$, где $a,b\geqslant 0$.

5. $\dfrac{5a}{3b}+\dfrac{12b}{5a}\geqslant 4$, где $a,b>0$.

6. $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+a^2\geqslant 2a$, где $a>0$.

7. $(1+a)(1+b)(1+c)>24$ при $\dfrac{ab}{3}=\dfrac{3}{c}$, где $a,b,c>0$.

8. $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}\geqslant 6$, где $a,b,c>0$.

9. Выясните, в каких пределах меняются выражения:

   а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{2a-b}{3a-5b}$,

   если $\begin{cases}1{,}1<a<2{,}3\\0{,}7<b<1{,}2\end{cases}$?

Вариант II

Доказите:

1. $\dfrac{ac^2+b}{c} \geqslant 2\sqrt{ab}$, где $a, b, c > 0$.

2. $\dfrac{a^2}{b^2}n + \dfrac{b^2}{a^2}m \geqslant 4$, если $m \cdot n = 4$ и $a \cdot b \geqslant 0$.

3. $(a+b)(ab+9) \geqslant 12ab$, где $a \cdot b \geqslant 0$.

4. $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (ab+1) \geqslant 8ab$, где $a, b \geqslant 0$.

5. $(a^2b^2+36)\left(\dfrac{a}{4b}+\dfrac{9b}{a}\right) \geqslant 36ab$, где $a \cdot b > 0$.

6. $a^4 + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{a} \geqslant 4$, где $a > 0$.

7. $(ab+b) \cdot (2a+3b)\left(\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}\right) \geqslant 288$, где $a, b > 0$.

8. $\dfrac{b+c+d}{a} + \dfrac{a+c+d}{b} + \dfrac{a+b+d}{c} + \dfrac{a+b+c}{d} \geqslant 12$,
   где $a, b, c, d > 0$.

9. Выясните, в каких пределах меняются выражения:
   а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{3a-2b}{2a-3b}$,
   если $\begin{cases} 2{,}2 < a < 3{,}4 \\ 1{,}4 < b < 2{,}4 \end{cases}$?

Решение тренировочной работы 1

Вариант I

Докажите:

1. $\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2} \geqslant \sqrt{(a+b)(c+d)}$, где $a, b, c, d \geqslant 0$.

Так как $\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{(a+b)+(c+d)}{2}$, то, используя теорему О. Коши, получим $\dfrac{(a+b)+(c+d)}{2} \geqslant \sqrt{(a+b)\cdot(c+d)}$, что и требовалось доказать.

2. $a^2m+b^2n \geqslant 2ab$, если $m \cdot n = 1$, где $a \cdot b \geqslant 0$.

По теореме О. Коши
$a^2m+b^2n \geqslant 2\sqrt{a^2m \cdot b^2 \cdot n} = 2\sqrt{(ab)^2 \cdot mn} = 2ab \cdot 1$,
что и требовалось доказать.

3. $(a^3+b)\cdot(a+b^3) \geqslant 4a^2b^2$, где $a, b \geqslant 0$.

По теореме О. Коши $\begin{cases} a^3+b \geqslant 2\sqrt{a^3b} \\ a+b^3 \geqslant 2\sqrt{ab^3} \end{cases}$.

По свойству ⑥ $(a^3+b)\cdot(a+b^3) \geqslant 2\cdot 2\cdot\sqrt{a^3\cdot b\cdot ab^3} = 4a^2b^2$, т. е. $(a^3+b)\cdot(a+b^3) \geqslant 4a^2b^2$, что и требовалось доказать.

4. $b(a^2+1)+a(b^2+1) \geqslant 4ab$, где $a, b \geqslant 0$.

Так как
$b(a^2+1)+a(b^2+1) = \underline{ba^2}+b+\underline{ab^2}+a = ab(a+b)+(a+b) =$
$=(a+b)(ab+1)$, то, используя теорему О. Коши, получим
$\begin{cases} a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \\ ab+1 \geqslant 2\sqrt{ab} \end{cases}$.

Тогда по свойству ⑥ $(a+b)(ab+1) \geqslant 2\cdot 2\cdot\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab} = 4ab$, значит $b(a^2+1)+a(b^2+1) \geqslant 4ab$, что и требовалось доказать.

5. $\dfrac{5a}{3b}+\dfrac{12b}{5a}\geqslant 4$, где $a,b>0$.

По теореме О. Коши $\dfrac{5a}{3b}+\dfrac{12b}{5a}\geqslant 2\cdot\sqrt{\dfrac{5a}{3b}\cdot\dfrac{12b}{5a}}=2\cdot 2=4$,

т. е. $\dfrac{5a}{3b}+\dfrac{12b}{5a}\geqslant 4$, что и требовалось доказать.

6. $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+a^2\geqslant 2a$, где $a>0$.

а) $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+a^2\geqslant 2a \Leftrightarrow \dfrac{a^2+1}{2a}+a^2-2a\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a^3-3a^2+1}{2a}\geqslant 0.$

Так как $2a^3-3a^2+1=(a-1)^2(2a+1)$, то исходное неравенство равносильно $\dfrac{(a-1)^2(2a+1)}{2a}\geqslant 0$.

Учитывая, что $a>0$, получаем $(a-1)^2(2a+1)\geqslant 0$ — истина.

б) Возможно и иное доказательство.

Так как $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$ (по теореме О. Коши),

то $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\geqslant 1$.

Используя свойство 2, прибавим к обеим частям неравенства число a^2:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+a^2\geqslant 1+a^2,\\ \text{где } 1+a^2\geqslant 2a \text{ (теорема О. Коши).}\end{cases}$$

Значит $\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{2}\right)+a^2\geqslant 1+a^2\geqslant 2a$.

По свойству 1 (транзитивности) следует, что

$\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+a^2\geqslant 2a$, что и требовалось доказать.

7. $(1+a)(1+b)(1+c)>24$ при $\dfrac{ab}{3}=\dfrac{3}{c}$, где $a,b,c>0$.

По теореме О. Коши $\begin{cases} 1+a\geqslant 2\sqrt{a} \\ 1+b\geqslant 2\sqrt{b} \\ 1+c\geqslant 2\sqrt{c} \end{cases}$,

тогда по свойству ⑥ $(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8\cdot\sqrt{abc}$,

но по условию $\dfrac{ab}{3}=\dfrac{3}{c}$, т. е. $abc=9$, значит

$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8\cdot\sqrt{9}=24$ — истина, что и требовалось доказать.

8. $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}\geqslant 6$, где $a,b,c>0$.

Используя свойство ②, прибавим к обеим частям число 3:

$$\left(\frac{a+b}{c}+1\right)+\left(\frac{b+c}{a}+1\right)+\left(\frac{a+c}{b}+1\right)\geqslant 9;$$

$$\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}\geqslant 9.$$

Получим $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 9$ — равносильно исходному.

По теореме О. Коши при $n=3$

$$\begin{cases} a+b+c\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{abc} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}} \end{cases}.$$

По свойству ⑥ получим

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=9,$$

значит $(a+b+c)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 9$,

следовательно, $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}\geqslant 6$ — истина, что и требовалось доказать.

9. Выясните, в каких пределах меняются выражения:

а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{2a-b}{3a-5b}$,

если $\begin{cases} 1{,}1 < a < 2{,}3 \\ 0{,}7 < b < 1{,}2 \end{cases}$?

а) Так как $\begin{cases} 1{,}1 < a < 2{,}3 \\ 0{,}7 < b < 1{,}2 \end{cases}$, то по свойству 6

$1{,}1 \cdot 0{,}7 < ab < 2{,}3 \cdot 1{,}2$, т. е. $\boxed{0{,}77 < ab < 2{,}76}$.

б) Так как $0{,}7 < b < 1{,}2$, то по следствию **2**

$\dfrac{1}{1{,}2} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{0{,}7}$, т. е. $\dfrac{5}{6} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{10}{7}$.

Тогда, так как $\begin{cases} 1{,}1 < a < 2{,}3 \\ \dfrac{5}{6} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{10}{7} \end{cases}$, то по свойству 6

$1{,}1 \cdot \dfrac{5}{6} < \dfrac{a}{b} < 2{,}3 \cdot \dfrac{10}{7}$, т. е. $\boxed{\dfrac{11}{12} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{23}{7}}$.

в) 1. Так как $\begin{cases} 2{,}2 < 2a < 4{,}6 \\ -1{,}2 < -b < -0{,}7 \end{cases}$,
то $\underline{1 < 2a - b < 3{,}9}$.

2. Так как $\begin{cases} 3{,}3 < 3a < 6{,}9 \\ -6 < -5b < -3{,}5 \end{cases}$,
то $\underline{-2{,}7 < 3a - 5b < 3{,}4}$.

Разобьем промежуток $(-2{,}7; 3{,}4)$ на два: $(0; 3{,}4)$ и $(-2{,}7; 0)$.

3. Пусть $0 < 3a - 5b < 3{,}4$, тогда $\dfrac{1}{3a-5b} > \dfrac{1}{3,4} = \dfrac{5}{17}$,

т. е. $\dfrac{1}{3a-5b} > \dfrac{5}{17}$.

4. Так как $\begin{cases} 2a - b > 1 \\ \dfrac{1}{3a-5b} > \dfrac{5}{17} \end{cases}$, то $\underline{\dfrac{2a-b}{3a-5b} > \dfrac{5}{17}}$.

5. Пусть $-2{,}7 < 3a-5b < 0$, тогда $2{,}7 > -(3a-5b) > 0$, значит $\dfrac{1}{-(3a-5b)} > \dfrac{1}{2{,}7} = \dfrac{10}{27}$.

6. Так как $\begin{cases} 2a-b>1 \\ \dfrac{1}{-(3a-5b)} > \dfrac{10}{27} \end{cases}$,

то $\dfrac{2a-b}{-(3a-5b)} > \dfrac{10}{27}$, следовательно, используя свойство 4, получим $\underline{\dfrac{2a-b}{3a-5b} < -\dfrac{10}{27}}$.

7. Объединив два решения, получим

$$\boxed{\frac{2a-b}{3a-5b} < -\frac{10}{27} \quad \text{или} \quad \frac{2a-b}{3a-5b} > \frac{5}{17}}.$$

Вариант II

Докажите:

1. $\dfrac{ac^2+b}{c} \geqslant 2\sqrt{ab}$, где $a, b, c > 0$.

Так как $\dfrac{ac^2+b}{c} = ac + \dfrac{b}{c}$, то по теореме О. Коши

$ac + \dfrac{b}{c} \geqslant 2 \cdot \sqrt{ac \cdot \dfrac{b}{c}} = 2\sqrt{ab}$ — истина, что и требовалось доказать.

2. $\dfrac{a^2}{b^2}n + \dfrac{b^2}{a^2}m \geqslant 4$, если $m \cdot n = 4$ и $a \cdot b \geqslant 0$.

По теореме О. Коши

$$\frac{a^2}{b^2}n + \frac{b^2}{a^2}m \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b^2}n \cdot \frac{b^2}{a^2}m} = 2 \cdot \sqrt{n \cdot m} = 2 \cdot \sqrt{4} = 4,$$

т. е. $\dfrac{a^2}{b^2}n + \dfrac{b^2}{a^2}m \geqslant 4$ — истина, что и требовалось доказать.

3. $(a+b)(ab+9) \geqslant 12ab$, где $a \cdot b \geqslant 0$.

По теореме О. Коши $\begin{cases} a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \\ ab+9 \geqslant 2\sqrt{ab \cdot 9} \end{cases}$, тогда по свойству 6 получим $(a+b)(ab+9) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{ab \cdot ab \cdot 9} = 12ab$ — истина, что и требовалось доказать.

4. $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (ab+1) \geqslant 8ab$, где $a, b \geqslant 0$.

По теореме О. Коши $\begin{cases} a+1 \geqslant 2\sqrt{a} \\ b+1 \geqslant 2\sqrt{b} \\ ab+1 \geqslant 2\sqrt{ab} \end{cases}$,

тогда по свойству 6 получим

$(a+1)(b+1)(ab+1) \geqslant 8\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{ab} = 8ab$ — истина, что и требовалось доказать.

5. $(a^2b^2+36)\left(\dfrac{a}{4b}+\dfrac{9b}{a}\right)\geqslant 36ab$, где $a\cdot b>0$.

По теореме О. Коши

$$\begin{cases} a^2b^2+36\geqslant 2\cdot\sqrt{36\cdot a^2b^2}=2\cdot 6\cdot ab=12ab \\ \dfrac{a}{4b}+\dfrac{9b}{a}\geqslant 2\cdot\sqrt{\dfrac{a}{4b}\cdot\dfrac{9b}{a}}=2\cdot\dfrac{3}{2}=3 \end{cases}, \text{ тогда}$$

по свойству ⑥ получим $(a^2b^2+36)\left(\dfrac{a}{4b}+\dfrac{9b}{a}\right)\geqslant 36ab$ — истина, что и требовалось доказать.

6. $a^4+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}\geqslant 4$, где $a>0$.

а) По теореме О. Коши

$$a^4+\frac{1}{a^2}\geqslant 2\sqrt{a^4\cdot\frac{1}{a^2}}=2a, \text{ т. е. } a^4+\frac{1}{a^2}\geqslant 2a.$$

По свойству ② прибавим к обеим частям полученного неравенства $\dfrac{2}{a}$, т. е. $a^4+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}\geqslant 2a+\dfrac{2}{a}$.

С другой стороны, по теореме О. Коши

$$2a+\frac{2}{a}\geqslant 2\cdot\sqrt{2a\cdot\frac{2}{a}}=4, \text{ т. е. } a^4+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}\geqslant 2a+\frac{2}{a}\geqslant 4.$$

Используя свойство ① (транзитивности), получим

$a^4+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}\geqslant 4$ — истина, что и требовалось доказать.

б) К счастью, есть и более короткий способ доказательства верности исходного неравенства.

Так как $a^4+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}=a^4+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}$, то, зная теорему О. Коши для $n=4$, применим ее к доказательству:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4};$$

$a^4+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}\geqslant 4\cdot\sqrt[4]{a^4\cdot\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a}}=4$ — истина, что и требовалось доказать.

7. $(ab+b)\cdot(2a+3b)\left(\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}\right)\geqslant 288$, где $a,b>0$.

По теореме О. Коши $\begin{cases} ab+6\geqslant 2\sqrt{6\cdot ab} \\ 2a+3b\geqslant 2\sqrt{2\cdot a\cdot 3\cdot b} \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{9}{a^2}\cdot\dfrac{4}{b^2}} \end{cases}$,

тогда по свойству 6 получим

$$(ab+6)(2a+3b)\cdot\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right)\geqslant 8\cdot\sqrt{6^2\cdot a^2b^2\cdot\frac{6^2}{a^2\cdot b^2}}=288 -$$

истина, следовательно $(ab+6)\cdot(2a+3b)\left(\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}\right)\geqslant 288$ — истина, что и требовалось доказать.

8. $\dfrac{b+c+d}{a}+\dfrac{a+c+d}{b}+\dfrac{a+b+d}{c}+\dfrac{a+b+c}{d}\geqslant 12$,

где $a,b,c,d>0$.

Используя свойство 2, прибавим к обеим частям неравенства число 4, получим $\left(\dfrac{b+c+d}{a}+1\right)+\left(\dfrac{a+c+d}{b}+1\right)+$ $+\left(\dfrac{a+b+d}{c}+1\right)+\left(\dfrac{a+b+c}{d}+1\right)\geqslant 16$;

$$\frac{a+b+c+d}{a}+\frac{a+b+c+d}{b}+\frac{a+b+c+d}{c}+\frac{a+b+c+d}{d}\geqslant 16.$$

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geqslant 16$$

(равносильно исходному).

Далее используем теорему О. Коши:

$$\begin{cases} (a+b+c+d)\geqslant 4\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\geqslant 4\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{d}} \end{cases}.$$

Используя свойство ⑥, получим

$$(a+b+c+d)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 16\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}}=16\text{ — истина.}$$

Значит, $\dfrac{b+c+d}{a}+\dfrac{a+c+d}{b}+\dfrac{a+b+d}{c}+\dfrac{a+b+c}{d}\geqslant 12$ — истина, что и требовалось доказать.

Отметим, что при доказательстве верности исходных неравенств мы использовали только равносильные логические переходы, поэтому тем самым верность исходных неравенств была доказана.

9. Выясните, в каких пределах меняются выражения:

а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{3a-2b}{2a-3b}$,

если $\begin{cases}2{,}2<a<3{,}4\\1{,}4<b<2{,}4\end{cases}$?

а) Так как $\begin{cases}2{,}2<a<3{,}4\\1{,}4<b<2{,}4\end{cases}$,

то, использовав свойство ⑥, получим

$2{,}2\cdot 1{,}4<a\cdot b<3{,}4\cdot 2{,}4$, т. е. $\boxed{3{,}08<a\cdot b<8{,}16}$.

б) 1. Так как $1{,}4<b<2{,}4$, то, используя следствие **2**, получим $\dfrac{1}{2{,}4}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{1{,}4}$, т. е. $\dfrac{5}{12}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{5}{7}$.

2. Так как $\begin{cases}2{,}2<a<3{,}4\\\dfrac{5}{12}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{5}{7}\end{cases}$, то, используя свойство ⑥,

получим $\dfrac{22}{10}\cdot\dfrac{5}{12}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{34}{10}\cdot\dfrac{5}{7}$, т. е. $\boxed{\dfrac{11}{12}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{17}{7}}$.

в) 1. Так как $\begin{cases} 6{,}6 < 3a < 10{,}2 \\ -4{,}8 < -2b < -2{,}8 \end{cases}$, то, используя свойство ③, получим $\underline{1{,}8 < 3a - 2b < 7{,}4}$.

2. Так как $\begin{cases} 4{,}4 < 2a < 6{,}8 \\ -7{,}2 < -3b < -4{,}2 \end{cases}$, то, используя свойство ③, получим $-2{,}8 < 2a - 3b < 2{,}6$.

Разобьем промежуток $(-2{,}8; 2{,}6)$ на два промежутка: $(0; 2{,}6)$ и $(-2{,}8; 0)$.

3. Пусть $0 < 2a - 3b < 2{,}6$,

тогда по следствию **2** $\dfrac{1}{2a-3b} > \dfrac{1}{2{,}6} = \dfrac{5}{13}$.

4. Так как $\begin{cases} 3a - 2b > 1{,}8 \\ \dfrac{1}{2a-3b} > \dfrac{5}{13} \end{cases}$,

то $\dfrac{3a-2b}{2a-3b} > \dfrac{18}{10} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{9}{13}$, т. е. $\underline{\dfrac{3a-2b}{2a-3b} > \dfrac{9}{13}}$.

5. Пусть $-2{,}8 < 2a - 3b < 0$, тогда $0 < -(2a - 3b) < 2{,}8$,

следовательно, $\dfrac{1}{-(2a-3b)} > \dfrac{1}{2{,}8} = \dfrac{5}{14}$.

6. Так как $\begin{cases} 3a - 2b > 1{,}8 \\ \dfrac{1}{-(2a-3b)} > \dfrac{5}{14} \end{cases}$, тогда, используя свойство ⑥, получим $\dfrac{3a-2b}{-(2a-3b)} > \dfrac{18}{10} \cdot \dfrac{5}{14} = \dfrac{9}{14}$,

следовательно, $\underline{\dfrac{3a-2b}{2a-3b} < -\dfrac{9}{14}}$.

7. Объединив два решения, получим

$$\boxed{\dfrac{3a-2b}{2a-3b} < -\dfrac{9}{14} \quad \text{или} \quad \dfrac{3a-2b}{2a-3b} > \dfrac{9}{13}}.$$

Практикум 4

Доказите:

Докажите:

1. $\dfrac{ad+bc}{bd}+\dfrac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$, где $a,b,c,d>0$.

2. $a^2+b^2+\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\geqslant 2$.

3. $\dfrac{2x}{3(y+z)}+\dfrac{2y}{3(x+z)}+\dfrac{2z}{3(x+y)}\geqslant 1$, где $x,y,z>0$.

4. $\dfrac{3x}{4(y+z+t)}+\dfrac{3y}{4(x+z+t)}+\dfrac{3z}{4(x+y+t)}+\dfrac{3t}{4(x+y+z)}\geqslant 1$, где $x,y,z,t>0$.

5. $(x+y)^2\leqslant(1+z)x^2+\left(1+\dfrac{1}{z}\right)y^2$, где $z>0$.

6. $xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\leqslant 1$, где $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$.

7. $\sqrt{(x+z)(y+z)}\geqslant\sqrt{x\cdot y}+\sqrt{z\cdot t}$, где $x,y,z,t>0$.

8. $\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+t^2}\geqslant\sqrt{(x+y)^2+(z+t)^2}$.

9. $\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}+\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+t^2)}+$
$+\sqrt{(y^2+t^2)(x^2+t^2)}+\sqrt{(x^2+t^2)(x^2+z^2)}\geqslant 2(x+y)(z+t)$.

10. В каких пределах меняются выражения

а) $\dfrac{3a+2b}{2a-3b}$; б) $\dfrac{3a-2b}{2a+3b}$; в) $\dfrac{3a+2b}{2a-3b}\cdot\dfrac{3a-2b}{2a+3b}$,

если $\begin{cases}3{,}6<a<4{,}2\\-5{,}4<b<-3{,}2\end{cases}$?

Решение практикума 4

Доказите:

1. $\dfrac{ad+bc}{bd}+\dfrac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$, где $a,b,c,d>0$.

а) 1. Так как

$$\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}=\frac{ac(ad+bc)+bd(bc+ad)}{a\cdot b\cdot c\cdot d}=$$
$$=\frac{a^2\cdot c\cdot d+c^2\cdot a\cdot b+b^2\cdot c\cdot d+d^2\cdot a\cdot b}{a\cdot b\cdot c\cdot d}=$$
$$=\frac{(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab}{abcd}=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}=$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right).$$

2. Так как $\begin{cases}\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2\\ \dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{c}\geqslant 2\cdot\sqrt{\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{d}{c}}=2\end{cases}$,

тогда, используя свойство 5, получим

$\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{c}\right)\geqslant 2+2$ — истина, значит

$\dfrac{ad+bc}{bd}+\dfrac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$, что и требовалось доказать.

б) Можно предложить другое доказательство.

1. Так как $\dfrac{ad+bc}{bd}+\dfrac{bc+ad}{ac}\geqslant 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ac(ad+bc)+bd(bc+ad)\geqslant 4abcd\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{a^2\cdot cd}+\underline{\underline{c^2\cdot ab}}+\underline{b^2\cdot cd}+\underline{\underline{d^2\cdot ab}}\geqslant 4abcd\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a^2\cdot cd-2abcd+b^2\cdot cd)+(c^2\cdot ab-4abcd+d^2\cdot ab)\geqslant 0$,

то $cd\cdot(a-b)^2+ab\cdot(c-d)^2\geqslant 0$.

2. Так как $\begin{cases} cd\cdot(a-b)^2\geqslant 0\\ ab\cdot(c-d)^2\geqslant 0\end{cases}$, то, используя свойство ⑤, получим $cd\cdot(a-b)^2+ab\cdot(c-d)^2\geqslant 0$ — истина, значит $\dfrac{ad+bc}{bd}+\dfrac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$ — истина, что и требовалось доказать.

Примечание. Если сразу увидеть, что

$$\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}=\underline{\frac{a}{b}}+\underline{\underline{\frac{c}{d}}}+\underline{\frac{b}{a}}+\underline{\underline{\frac{d}{c}}},$$

то доказательство будет существенно проще.

Так как $\begin{cases} \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2\\ \dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{c}\geqslant 2\cdot\sqrt{\dfrac{c}{d}\cdot\dfrac{d}{c}}=2\end{cases}$, то $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{c}\geqslant 4$,

что и требовалось доказать.

2. $a^2+b^2+\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\geqslant 2.$

Так как $a^2+b^2+\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}=$

$$=\left(a^2+1+\frac{1}{a^2+1}\right)+\left(b^2+1+\frac{1}{b^2+1}\right)-2,$$

то, используя теорему О. Коши, получим

$$\begin{cases} a^2+1+\dfrac{1}{a^2+1}\geqslant 2\cdot\sqrt{(a^2+1)\cdot\dfrac{1}{(a^2+1)}}=2\\ b^2+1+\dfrac{1}{b^2+1}\geqslant 2\cdot\sqrt{(b^2+1)\cdot\dfrac{1}{(b^2+1)}}=2\end{cases}.$$

Тогда, используя свойство ⑤, получим

$\left(a^2+1+\dfrac{1}{a^2+1}\right)+\left(b^2+1+\dfrac{1}{b^2+1}\right)-2\geqslant 2+2-2=2$ — верно, значит $a^2+b^2+\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\geqslant 2$ — истина, что и требовалось доказать.

3. $\dfrac{2x}{3(y+z)} + \dfrac{2y}{3(x+z)} + \dfrac{2z}{3(x+y)} \geqslant 1$, где $x, y, z > 0$.

Используя свойство (2), прибавим к обеим частям неравенства число $2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}$:

$$\left(\frac{2x}{3(y+z)} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2y}{3(x+z)} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2z}{3(x+y)} + \frac{2}{3}\right) \geqslant 3.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{3}\left(\frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{x+z} + \frac{x+y+z}{x+y}\right) \geqslant 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) \geqslant 9.$$

Так как $2(x+y+z) = (y+z) + (x+z) + (x+y)$, то

$$\big((y+z) + (x+z) + (y+z)\big) \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) \geqslant 9.$$

Так как по теореме О. Коши

$$\begin{cases} (y+z) + (x+z) + (y+z) \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{(y+z)(x+z)(y+z)} \\ \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+z} + \dfrac{1}{x+y} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{y+z} \cdot \dfrac{1}{x+z} \cdot \dfrac{1}{x+y}} \end{cases},$$

то, используя свойство (6), получим

$$\big((y+z) + (x+z) + (y+z)\big) \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 9\sqrt[3]{(y+z)(x+z)(x+y) \cdot \frac{1}{y+z} \cdot \frac{1}{x+z} \cdot \frac{1}{x+y}} = 9.$$

Таким образом, мы доказали истинность исходного неравенства, что и требовалось.

4. $\dfrac{3x}{4(y+z+t)}+\dfrac{3y}{4(x+z+t)}+\dfrac{3z}{4(x+y+t)}+\dfrac{3t}{4(x+y+z)}\geqslant 1,$

где $x, y, z, t > 0$.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\mathrm{L}=\frac{3x}{4(y+z+t)}+\frac{3y}{4(x+z+t)}+\frac{3z}{4(x+y+t)}+\frac{3t}{4(x+y+z)}=$$

$$=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{x}{y+z+t}+1\right)+\left(\frac{y}{x+z+t}+1\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z}{x+y+t}+1\right)+\left(\frac{t}{x+y+z}+1\right)-4\right)=$$

$$=\frac{3}{4}(x+y+z+t)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{y+z+t}+\frac{1}{x+z+t}+\frac{1}{x+y+t}+\frac{1}{x+y+z}-4\right).$$

Так как $3(x+y+z+t)=$

$=(y+z+t)+(x+z+t)+(x+y+t)+(x+y+z)$,

то по теореме О. Коши

$$((y+z+t)+(x+z+t)+(x+y+t)+(x+y+z))\geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{(y+z+t)\cdot(x+z+t)\cdot(x+y+t)\cdot(x+y+z)};$$

$$\frac{1}{y+z+t}+\frac{1}{x+z+t}+\frac{1}{x+y+t}+\frac{1}{x+y+z}\geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{y+z+t}\cdot\frac{1}{x+z+t}\cdot\frac{1}{x+y+t}\cdot\frac{1}{x+y+z}}.$$

Значит, используя свойство 6, перемножим их и получим

$3(x+y+z+t)\cdot\left(\dfrac{1}{y+z+t}+\dfrac{1}{x+z+t}+\dfrac{1}{x+y+t}+\dfrac{1}{x+y+z}\right)\geqslant 16$ — истина, тогда

$$\frac{3}{4}(x+y+z+t)\cdot\left(\frac{1}{y+z+t}+\frac{1}{x+z+t}+\frac{1}{x+y+t}+\frac{1}{x+y+z}\right)\geqslant 4.$$

Так как $3 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1+1+1+1)$, то

$$\frac{3}{4}\left((x+y+z+t)\left(\frac{1}{y+z+t}+\frac{1}{x+z+t}+\frac{1}{x+y+t}+\frac{1}{x+y+z}\right)-4\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(\frac{x+y+z+t}{y+z+t}+\frac{x+y+z+t}{x+z+t}+\frac{x+y+z+t}{x+y+t}+\frac{x+y+z+t}{x+y+z}-4\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(\frac{x}{y+z+t}+\frac{y}{x+z+t}+\frac{z}{x+y+t}+\frac{t}{x+y+z}\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{4(y+z+t)}+\frac{3y}{4(x+z+t)}+\frac{3z}{4(x+y+t)}+\frac{3t}{4(x+y+z)} \geqslant 1 \text{ —}$$

истина, что и требовалось доказать.

5. $(x+y)^2 \leqslant (1+z)x^2 + \left(1+\frac{1}{z}\right)y^2$, где $z > 0$.

Так как правая часть неравенства

$$\Pi = (1+z)x^2 + \left(1+\frac{1}{z}\right)y^2 = x^2 + y^2 + \left(z\cdot x^2 + \frac{1}{z}\cdot y^2\right),$$

значит исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x+y)^2 \leqslant x^2 + y^2 + z\cdot x^2 + \frac{1}{z}\cdot y^2 \Leftrightarrow 2xy \leqslant z\cdot x^2 + \frac{1}{z}y^2$$

(по свойству 2).

С другой стороны, по теореме О. Коши

$$zx^2 + \frac{1}{z}y^2 \geqslant 2\cdot\sqrt{z\cdot x^2\cdot\frac{1}{z}\cdot y^2} = 2\sqrt{x^2\cdot y^2} = 2xy \text{ — истина,}$$

следовательно $(x+y)^2 \leqslant (1+z)x^2 + \left(1+\frac{1}{z}\right)y^2$ — истина, что и требовалось доказать.

6. $xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leqslant 1$, где $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

а) Так как по условию $\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1 \end{cases}$,

то по свойству 6 $|x|\cdot|y| \leqslant 1$, т. е. $|xy| \leqslant 1$.

Следовательно, $1 - |xy| \geqslant 0$.

б) $xy + \sqrt{(1-x^2)\cdot(1-y^2)} \leqslant 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x^2)\cdot(1-y^2)} \leqslant 1 - xy$ (по свойству ②).
Известно, что $|xy| \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} xy \leqslant 1 \\ xy \geqslant -1 \end{cases}$, значит $1 - xy \geqslant 0$.

в) По свойству ⑥ получим, что исходное неравенство равносильно $\left(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)^2 \leqslant (1-xy)^2$,
т. е. $(1-x^2)\cdot(1-y^2) \leqslant 1 - 2xy + x^2y^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 + \underline{x^2y^2} \leqslant 1 - 2xy + \underline{x^2y^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geqslant 0$ — истина. Значит, из-за равносильности логических переходов от исходного неравенства к истинному утверждению, получается, что $xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leqslant 1$ — истина, что и требовалось доказать.

7. $\sqrt{(x+z)(y+z)} \geqslant \sqrt{x\cdot y} + \sqrt{z\cdot t}$, где $x, y, z, t > 0$.

По свойству ⑥ получим, что исходное неравенство равносильно неравенству

$(x+z)(y+t) \geqslant xy + 2\sqrt{xyzt} + zt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{xy} + zy + xt + \underline{\underline{zt}} \geqslant \underline{xy} + 2\sqrt{xyzt} + \underline{\underline{zt}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow zy + xt \geqslant 2\sqrt{xyzt}$.

С другой стороны, по теореме О. Коши

$zy + xt > 2\sqrt{zy\cdot xt}$ — истина, значит полученное неравенство равносильно исходному,

т. е. $\sqrt{(x+z)(y+t)} \geqslant \sqrt{xy} + \sqrt{zt}$ — истина, что и требовалось доказать.

8. $\sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+t^2} \geqslant \sqrt{(x+y)^2 + (z+t)^2}$.

Используя следствие **3**, получим

$x^2 + z^2 + 2\sqrt{x^2+z^2}\cdot\sqrt{y^2+t^2} + y^2 + t^2 \geqslant (x+y)^2 + (z+t)^2 \Leftrightarrow$

$\underline{x^2} + \underline{\underline{z^2}} + 2\cdot\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+t^2)} + \underline{\underline{\underline{y^2}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{t^2}}}} \geqslant$

$\geqslant \underline{x^2} + 2xy + \underline{\underline{\underline{y^2}}} + \underline{\underline{z^2}} + 2zt + \underline{\underline{\underline{\underline{t^2}}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+y^2)(y^2+t^2)} \geqslant xy+zt \Leftrightarrow$

(если $xy+zt \geqslant 0$, далее см. примечание)

$\Leftrightarrow (x^2+z^2)(y^2+t^2) \geqslant (xy+zt)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x^2y^2} + z^2y^2 + x^2t^2 + \underline{z^2t^2} \geqslant \underline{\underline{x^2y^2}} + 2xyzt + \underline{z^2t^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2y^2 - 2xyzt + x^2t^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (zy-xt)^2 \geqslant 0$ — истина, следовательно, $\sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+t^2} \geqslant \sqrt{(x+y)^2+(z+t)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (zy-xt)^2 \geqslant 0$ — истина, что и требовалось доказать.

Примечание. Если $xy+zt \leqslant 0$, то $\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+t^2)} \geqslant$ $\geqslant xy+zt$ — верно. Значит, исходное неравенство и в этом случае — истина для любых значений x, y, z, t.

9. $\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)} + \sqrt{(y^2+z^2)(y^2+t^2)} +$
$+ \sqrt{(y^2+t^2)(x^2+t^2)} + \sqrt{(x^2+t^2)(x^2+z^2)} \geqslant 2(x+y)(z+t)$.

Так как $2(x+y)(z+t) = 2(xz+yz+xt+yt) =$

$= (xz+yz) + (yz+yt) + (xt+yt) + (xz+xt)$,

то сначала докажем, что:

а) 1. $\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)} \geqslant xz+yz \Leftrightarrow$
(следствие **3**, см. примечание к примеру 8)
$\Leftrightarrow (x^2+z^2)\cdot(y^2+z^2) \geqslant x^2z^2 + 2xzyt + y^2z^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2y^2 + \underline{\underline{y^2z^2}} + \underline{x^2z^2} + z^4 \geqslant \underline{x^2z^2} + 2x\cdot yz^2 + \underline{\underline{y^2z^2}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2y^2 - 2xyz^2 + z^4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (xy-z^2)^2 \geqslant 0$ — истина.

2. $\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+t^2)} \geqslant yz+yt \Leftrightarrow$
(доказательство аналогичное)
$\Leftrightarrow (zt-y^2)^2 \geqslant 0$ — истина.

3. $\sqrt{(y^2+t^2)(x^2+t^2)} \geqslant xt+yt \Leftrightarrow$
(по аналогии)
$\Leftrightarrow (xy-t^2)^2 \geqslant 0$ — истина.

4. $\sqrt{(x^2+t^2)(x^2+z^2)} \geqslant xz+xt \Leftrightarrow$
(по аналогии)
$\Leftrightarrow (x^2-zt)^2 \geqslant 0$ — истина.

б) Так как $\begin{cases} \sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)} \geqslant xz+yz \\ \sqrt{(y^2+z^2)(y^2+t^2)} \geqslant yz+yt \\ \sqrt{(y^2+t^2)(x^2+t^2)} \geqslant xt+yt \\ \sqrt{(x^2+t^2)(x^2+z^2)} \geqslant xz+xt \end{cases}$,

то по свойству 5 получим, что исходное неравенство равносильно сумме четырех верных неравенств,

т. е. $\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}+\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+t^2)}+$

$+\sqrt{(y^2+t^2)(x^2+t^2)}+\sqrt{(x^2+t^2)(x^2+z^2)} \geqslant$

$\geqslant 2(x+y)(z+t)$ — истина, что и требовалось доказать.

10. В каких пределах меняются выражения

а) $\dfrac{3a+2b}{2a-3b}$; б) $\dfrac{3a-2b}{2a+3b}$; в) $\dfrac{3a+2b}{2a-3b}\cdot\dfrac{3a-2b}{2a+3b}$,

если $\begin{cases} 3{,}6 < a < 4{,}2 \\ -5{,}4 < b < -3{,}2 \end{cases}$?

а) 1. Так как $\begin{cases} 10{,}8 < 3a < 12{,}6 \\ -10{,}8 < 2b < -6{,}4 \end{cases}$, то $\underline{0 < 3a+2b < 6{,}2}$.

2. Так как $\begin{cases} 7{,}2 < 2a < 8{,}4 \\ 9{,}6 < -3b < 16{,}2 \end{cases}$, то $16{,}8 < 2a-3b < 24{,}6$,

тогда $\dfrac{1}{24{,}6} < \dfrac{1}{2a-3b} < \dfrac{1}{16{,}8}$, т. е. $\underline{\dfrac{5}{123} < \dfrac{1}{2a-3b} < \dfrac{5}{84}}$.

3. Так как $\begin{cases} 0 < 3a+2b < 6{,}2 \\ \dfrac{5}{123} < \dfrac{1}{2a-3b} < \dfrac{5}{84} \end{cases}$,

то $0\cdot\dfrac{5}{123} < \dfrac{3a+2b}{2a-3b} < \dfrac{62}{10}\cdot\dfrac{5}{84}$,

т. е. $\boxed{0 < \dfrac{3a+2b}{2a-3b} < \dfrac{31}{84}}$.

б) 1. Так как $\begin{cases} 10{,}8 < 3a < 12{,}6 \\ 6{,}4 < -2b < 10{,}8 \end{cases}$,

то $\underline{17{,}2 < 3a - 2b < 23{,}4}$.

2. Так как $\begin{cases} 7{,}2 < 2a < 8{,}4 \\ -16{,}2 < 3b < -9{,}6 \end{cases}$,

то $-9 < 2a + 3b < -1{,}2$, тогда $1{,}2 < -(2a + 3b) < 9$,

следовательно, $\underline{\frac{1}{9} < \frac{1}{-(2a+3b)} < \frac{1}{1{,}2}} = \frac{5}{6}$.

3. Так как $\begin{cases} 17{,}2 < 3a - 2b < 23{,}4 \\ \frac{1}{9} < \frac{1}{-(2a+3b)} < \frac{5}{6} \end{cases}$,

то $\frac{172}{10} \cdot \frac{1}{9} < \frac{3a-2b}{-(2a+3b)} < \frac{234}{10} \cdot \frac{5}{6}$,

тогда $\frac{86}{45} < \frac{3a-2b}{-(2a+3b)} < \frac{39}{2}$,

следовательно, $\boxed{-\frac{39}{2} < \frac{3a-2b}{2a+3b} < -\frac{86}{45}}$.

в) Так как $\begin{cases} 0 < \frac{3a+2b}{2a-3b} < \frac{31}{84} \\ \frac{86}{45} < \frac{3a-2b}{-(2a+3b)} < \frac{39}{2} \end{cases}$,

то $0 < \frac{3a+2b}{2a-3b} \cdot \frac{3a-2b}{-(2a+3b)} < \frac{31}{84} \cdot \frac{39}{2} = \frac{403}{56}$,

следовательно, $\boxed{-\frac{403}{56} < \frac{3a+2b}{2a-3b} \cdot \frac{3a-2b}{2a+3b} < 0}$.

Тренировочная работа 2

Вариант I

Доказите:

1. $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2.$

2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^4 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^4 \geqslant \dfrac{b}{c} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{a};\ a, b, c \neq 0.$

3. $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \geqslant 4xyzt;\ \ x, y, z, t \geqslant 0.$

4. $\dfrac{x^3}{yz} + \dfrac{y^3}{xz} + \dfrac{z^3}{xy} \geqslant x + y + z;\ x, y, z > 0.$

5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4 + \left(\dfrac{y}{z}\right)^4 + \left(\dfrac{z}{x}\right)^4 \geqslant \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x};\ x, y, z > 0.$

6. $3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \geqslant 2(xy + xz + xt + yz + yt + zt).$

7. $4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \geqslant (x + y + z + t)^2.$

8. В каких пределах меняются выражения

а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{2a+b}{3a+4b}$,

если $\begin{cases} 2{,}8 < a < 3{,}6 \\ -3{,}9 < b < -2{,}4 \end{cases}$?

Вариант II

Доказите:

1. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leqslant 3(a+b+c)$; $a, b, c \geqslant 0$.

2. $\dfrac{xy}{zt}+\dfrac{yz}{xt}+\dfrac{zt}{xy}+\dfrac{xt}{yz} \geqslant 4$; $x, y, z, t > 0$.

3. $x^4+y^4+z^4 \geqslant xyz(x+y+z)$.

4. $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^4+\left(\dfrac{xz}{y}\right)^4+\left(\dfrac{yz}{x}\right)^4 \geqslant (x+y+z)xyz$.

5. $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz$.

6. $\dfrac{y\cdot z}{x^3}+\dfrac{x\cdot z}{y^3}+\dfrac{x\cdot y}{z^3} \geqslant \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

7. $(x+y-t)^2+(y+t-x)^2+(x+t-y)^2 \geqslant xy+yt+xt$.

8. В каких пределах меняются выражения

а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{2a-b}{a+b}$,

если $\begin{cases} 3{,}2 < a < 4{,}5 \\ -3{,}9 < b < -2{,}7 \end{cases}$?

Решение тренировочной работы 2

Вариант I

Докажите:

1. $x^4+y^4+z^4 \geqslant x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$.

Так как по теореме О. Коши $\begin{cases} x^4+y^4 \geqslant 2x^2y^2 \\ x^4+z^4 \geqslant 2x^2z^2 \\ y^4+z^4 \geqslant 2y^2z^2 \end{cases}$,

то $(x^4+y^4)+(x^4+z^4)+(y^4+z^4) \geqslant 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$, значит $x^4+y^4+z^4 \geqslant x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$, что и требовалось доказать.

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}$; $a, b, c \neq 0$.

Так как по теореме О. Коши

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4 \geqslant 2\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^4\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^4} = 2\cdot\frac{a^2}{c^2} \\ \left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant 2\cdot\sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^4\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^4} = 2\cdot\frac{b^2}{a^2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant 2\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^4\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^4} = 2\cdot\frac{c^2}{b^2} \end{cases},$$

то $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}$.

С другой стороны, так как по теореме О. Коши $\begin{cases} \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2} \geqslant 2\cdot\frac{b}{c} \\ \frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2} \geqslant 2\cdot\frac{a}{b} \\ \frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2} \geqslant 2\cdot\frac{c}{a} \end{cases}$,

то $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2} \geqslant \frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}$.

Значит $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2} \geqslant \frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}$.

В силу транзитивности $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{b}{c}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.

3. $x^4+y^4+z^4+t^4 \geqslant 4xyzt;\;\; x,y,z,t \geqslant 0.$

Так как при $n=4$ теорема О. Коши имеет вид

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4},$$

то $x^4+y^4+z^4+t^4 \geqslant 4\sqrt[4]{x^4\cdot y^4\cdot z^4\cdot t^4} = 4|x|\cdot|y|\cdot|z|\cdot|t| = 4xyzt$,

т. е. $x^4+y^4+z^4+t^4 \geqslant 4xyzt$, что и требовалось доказать.

4. $\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy} \geqslant x+y+z;\; x,y,z>0.$

а) $$\begin{cases} \dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{x^3}{yz}\cdot\dfrac{y^3}{xz}} = 2\sqrt{\dfrac{x^2y^2}{z^2}} = 2\cdot\dfrac{xy}{z} \\ \dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{z^3}{xy} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{x^3}{yz}\cdot\dfrac{z^3}{xy}} = 2\sqrt{\dfrac{x^2z^2}{y^2}} = 2\cdot\dfrac{xz}{y} \\ \dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{y^3}{xz}\cdot\dfrac{z^3}{xy}} = 2\sqrt{\dfrac{y^2z^2}{x^2}} = 2\cdot\dfrac{yz}{x} \end{cases},$$

тогда $\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy} \geqslant \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}.$

б) $$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y} \geqslant 2\sqrt{x^2} = 2x \\ \dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x} \geqslant 2\sqrt{y^2} = 2y \\ \dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x} \geqslant 2\sqrt{z^2} = 2z \end{cases}, \text{ тогда } \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x} \geqslant x+y+z$$

в) $\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy} \geqslant \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x} \geqslant x+y+z.$

По свойству транзитивности $\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy} \geqslant x+y+z$

что и требовалось доказать.

5. $\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\left(\frac{z}{x}\right)^4\geqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x};\ x,y,z>0.$

а) $\begin{cases}\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4\geqslant 2\cdot\frac{x^2}{z^2}\\ \left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{z}{x}\right)^4\geqslant 2\cdot\frac{z^2}{y^2}\\ \left(\frac{y}{z}\right)^4+\left(\frac{z}{x}\right)^4\geqslant 2\cdot\frac{y^2}{x^2}\end{cases}$ по теореме Коши.

Складывая почленно, получим:

$\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\left(\frac{z}{x}\right)^4\geqslant\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}$

$(x,y,z>0)$.

б) $\left.\begin{cases}\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}\geqslant 2\cdot\frac{x}{y}\\ \frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{x^2}\geqslant 2\cdot\frac{y}{z}\\ \frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geqslant 2\cdot\frac{z}{x}\end{cases}\right|$, значит $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}\geqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

в) $\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\left(\frac{z}{x}\right)^4\geqslant\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

В силу транзитивности

$\left(\frac{x}{y}\right)^4+\left(\frac{y}{z}\right)^4+\left(\frac{z}{x}\right)^4\geqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$,

что и требовалось доказать.

6. $3(x^2+y^2+z^2+t^2)\geqslant 2(xy+xz+xt+yz+yt+zt)$.

Так как по теореме О. Коши $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant 2xy\\ x^2+z^2\geqslant 2xz\\ x^2+t^2\geqslant 2xt\\ y^2+z^2\geqslant 2yz\\ y^2+t^2\geqslant 2yt\\ z^2+t^2\geqslant 2zt\end{cases}$, то, почленно складывая обе части неравенств, получим исходное неравенство, верность которого связана с равносильностью логических переходов.

Таким образом,

$3(x^2+y^2+z^2+t^2) \geqslant 2(xy+xz+xt+yz+yt+zt)$,

что и требовалось доказать.

7. $4(x^2+y^2+z^2+t^2) \geqslant (x+y+z+t)^2$.

а) Так как $(x+y+z+t)^2 = (x+y+z+t)(x+y+z+t) =$

$$= x^2+xy+xz+xt+xy+y^2+yz+yt+$$
$$+zx+zy+z^2+zt+tx+ty+tz+t^2 =$$
$$= x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt,$$ то

$$4(x^2+y^2+z^2+t^2) \geqslant$$
$$\geqslant x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt,$$

тогда

$$3x^2+3y^2+3z^2+3t^3 \geqslant 2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt.$$

б) $$\begin{cases} \underline{x}^2-2xy+\underline{\underline{y}}^2=(x-y)^2 \geqslant 0 \\ \underline{x}^2-2xz+\underline{\underline{\underline{z}}}^2=(x-z)^2 \geqslant 0 \\ \underline{x}^2-2xt+\underline{\underline{\underline{\underline{t}}}}^2=(x-t)^2 \geqslant 0 \\ \underline{\underline{y}}^2-2yz+\underline{\underline{\underline{z}}}^2=(y-z)^2 \geqslant 0 \\ \underline{\underline{y}}^2-2yt+\underline{\underline{\underline{\underline{t}}}}^2=(y-t)^2 \geqslant 0 \\ \underline{\underline{\underline{z}}}^2-2zt+\underline{\underline{\underline{\underline{t}}}}^2=(z-t)^2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

Складывая почленно, получим $3x^2+3y^2+3z^2+3t^2-$ $-(2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt) \geqslant 0$, т. е.

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2+(z-t)^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

8. В каких пределах меняются выражения

а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{2a+b}{3a+4b}$,

если $\begin{cases} 2{,}8 < a < 3{,}6 \\ -3{,}9 < b < -2{,}4 \end{cases}$?

а) Так как $-3{,}9 < b < -2{,}4$, то $2{,}4 < -b < 3{,}9$.

Учитывая, что $2{,}8 < a < 3{,}6$, получим, что

$2{,}8 \cdot 2{,}4 < a(-b) < 3{,}6 \cdot 3{,}9$, т. е. $6{,}72 < a(-b) < 14{,}04$,

значит $\boxed{-14{,}04 < ab < -6{,}72}$.

б) Так как $2{,}4 < -b < 3{,}9$, то $\dfrac{1}{3{,}9} < \dfrac{1}{-b} < \dfrac{1}{2{,}4}$,

т. е. $\dfrac{10}{39} < \dfrac{1}{-b} < \dfrac{5}{12}$, значит $2{,}8 \cdot \dfrac{10}{39} < a \cdot \left(-\dfrac{1}{b}\right) < 3{,}6 \cdot \dfrac{5}{12}$,

т. е. $\dfrac{28}{39} < -\dfrac{a}{b} < \dfrac{3}{2}$, следовательно, $\boxed{-\dfrac{3}{2} < \dfrac{a}{b} < -\dfrac{28}{39}}$.

в) 1. Так как $\begin{cases} 5{,}6 < 2a < 7{,}2 \\ -3{,}9 < b < -2{,}4 \end{cases}$, то $\underline{1{,}7 < 2a + b < 4{,}8}$.

2. Так как $\begin{cases} 7{,}2 < 3a < 10{,}8 \\ -15{,}6 < 4b < -9{,}6 \end{cases}$,

то $-8{,}4 < 3a + 4b < 1{,}2$.

Разобьем промежуток $(-8{,}4; 1{,}2)$ на два: $(0; 1{,}2)$ и $(-8{,}4; 0)$.

3. Пусть $0 < \underline{3a + 4b < 1{,}2}$, тогда $\dfrac{1}{3a+4b} > \dfrac{1}{1{,}2} = \dfrac{5}{6}$.

Учитывая, что $\begin{cases} 1{,}7 < 2a + b < 4{,}8 \\ \dfrac{5}{6} < \dfrac{1}{3a+4b} \end{cases}$,

то $\dfrac{2a+b}{3a+4b} > \dfrac{17}{10} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{17}{12}$, т. е. $\underline{\underline{\dfrac{2a+b}{3a+4b} > \dfrac{17}{12}}}$.

4. Пусть $-8{,}4 < 3a+4b < 0$, тогда $0 < -(3a+4b) < 8{,}4$, следовательно, $\dfrac{1}{-(3a+4b)} > \dfrac{1}{8{,}4} = \dfrac{10}{84} = \dfrac{5}{42}$.

Учитывая, что $\begin{cases} 2a+b > 1{,}7 \\ \dfrac{1}{-(3a+4b)} > \dfrac{5}{42} \end{cases}$,

то $\dfrac{2a+b}{-(3a+4b)} > \dfrac{17}{10} \cdot \dfrac{5}{42} = \dfrac{17}{84}$.

5. Так как $\dfrac{2a+b}{-(3a+4b)} > \dfrac{17}{84}$, то $\underline{\underline{\dfrac{2a+b}{3a+4b} < -\dfrac{17}{84}}}$.

6. Объединяя два решения, получим

$$\boxed{\frac{2a+b}{3a+4b} < -\frac{17}{84} \quad \text{или} \quad \frac{2a+b}{3a+4b} > \frac{17}{12}}.$$

Вариант II

Докажите:

1. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leqslant 3(a+b+c)$; $a, b, c \geqslant 0$.

а) Так как $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 =$
$= (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$,
то исходное неравенство приобретает вид
$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \leqslant 3a+3b+3c$,
т. е. $2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-2\sqrt{bc} \geqslant 0$.

б) Так как $\begin{cases} a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \\ a-2\sqrt{ac}+c=(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 \geqslant 0 \\ b-2\sqrt{bc}+c=(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geqslant 0 \end{cases}$,

то, почленно складывая, получим
$2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-2\sqrt{bc} =$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geqslant 0$,
что и требовалось доказать.

2. $\dfrac{xy}{zt}+\dfrac{yz}{xt}+\dfrac{zt}{xy}+\dfrac{xt}{yz} \geqslant 4$; $x, y, z, t > 0$.

По теореме О. Коши при $n=4$
$\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}$. Тогда

$$\frac{xy}{zt}+\frac{yz}{xt}+\frac{zt}{xy}+\frac{xt}{yz} \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{xy}{zt}\cdot\frac{yz}{xt}\cdot\frac{zt}{xy}\cdot\frac{xt}{yz}} = 4,$$

что и требовалось доказать.

3. $x^4+y^4+z^4 \geqslant xyz(x+y+z)$.

а) Так как $\begin{cases} x^4+y^4 \geqslant 2x^2y^2 \\ x^4+z^4 \geqslant 2x^2z^2 \\ y^4+z^4 \geqslant 2y^2z^2 \end{cases}$,

то $x^4+y^4+z^4 \geqslant x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$.

б) Так как $\begin{cases} x^2y^2 + x^2z^2 \geqslant 2x^2yz \\ x^2y^2 + y^2z^2 \geqslant 2y^2xz \\ x^2z^2 + y^2z^2 \geqslant 2z^2xy \end{cases}$,

то $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \geqslant x^2yz + y^2xz + z^2xy$,

где $x^2yz + y^2xz + z^2xy = xyz(x + y + z)$.

в) $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \geqslant x^2yz + y^2xz + z^2xy =$
$= xyz(x + y + z)$.

Учитывая транзитивность, $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant xyz(x + y + z)$, что и требовалось доказать.

4. $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^4 + \left(\dfrac{xz}{y}\right)^4 + \left(\dfrac{yz}{x}\right)^4 \geqslant (x + y + z)xyz$.

Так как $\begin{cases} \left(\dfrac{xy}{z}\right)^4 + \left(\dfrac{xz}{y}\right)^4 \geqslant 2 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{xy}{z}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{xz}{y}\right)^4} = 2x^4 \\ \left(\dfrac{xy}{z}\right)^4 + \left(\dfrac{yz}{x}\right)^4 \geqslant 2 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{xy}{z}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{yz}{x}\right)^4} = 2y^4 \\ \left(\dfrac{xz}{y}\right)^4 + \left(\dfrac{yz}{x}\right)^4 \geqslant 2 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{xz}{y}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{yz}{x}\right)^4} = 2z^4 \end{cases}$,

то $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^4 + \left(\dfrac{xz}{y}\right)^4 + \left(\dfrac{yz}{x}\right)^4 \geqslant x^4 + y^4 + z^4$.

Так как ранее было доказано, что

$x^4 + y^4 + z^4 \geqslant xyz(x + y + z)$,

то $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^4 + \left(\dfrac{xz}{y}\right)^4 + \left(\dfrac{yz}{x}\right)^4 \geqslant (x + y + z)xyz$,

что и требовалось доказать.

5. $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$.

По теореме О. Коши при $n = 3$: $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$.

Тогда $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot z^3} = 3xyz$, что и требовалось доказать.

6. $\dfrac{y\cdot z}{x^3}+\dfrac{x\cdot z}{y^3}+\dfrac{x\cdot y}{z^3}\geqslant\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}.$

а) $$\begin{cases}\dfrac{\frac{y\cdot z}{x^3}+\frac{x\cdot z}{y^3}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{z^2}{y^2\cdot x^2}}=\dfrac{z}{y\cdot x}\\ \dfrac{\frac{y\cdot z}{x^3}+\frac{x\cdot y}{z^3}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2\cdot z^2}}=\dfrac{y}{x\cdot z}\\ \dfrac{\frac{x\cdot z}{y^3}+\frac{x\cdot y}{z^3}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{x^2}{y^2\cdot z^2}}=\dfrac{x}{y\cdot z}\end{cases}.$$

Почленно складывая обе части неравенств, используя свойство ⑤, получим:

$$\frac{y\cdot z}{x^3}+\frac{x\cdot z}{y^3}+\frac{x\cdot y}{z^3}\geqslant\frac{z}{y\cdot x}+\frac{y}{x\cdot z}+\frac{x}{y\cdot z}.$$

б) $$\begin{cases}\dfrac{\frac{z}{y\cdot x}+\frac{y}{x\cdot z}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{z\cdot y}{y\cdot z\cdot x^2}}=\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{\frac{z}{y\cdot x}+\frac{x}{y\cdot z}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{z\cdot x}{x\cdot z\cdot y^2}}=\dfrac{1}{y}\\ \dfrac{\frac{y}{x\cdot z}+\frac{x}{y\cdot z}}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{y\cdot x}{x\cdot y\cdot z^2}}=\dfrac{1}{z}\end{cases},$$

значит $\dfrac{z}{y\cdot x}+\dfrac{y}{x\cdot z}+\dfrac{x}{y\cdot z}\geqslant\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}.$

Используя свойство транзитивности, получим:

$$\frac{y\cdot z}{x^3}+\frac{x\cdot z}{y^3}+\frac{x\cdot y}{z^3}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

7. $(x+y-t)^2+(y+t-x)^2+(x+t-y)^2\geqslant xy+yt+xt.$

Так как $\begin{cases}(x+y-t)^2=x^2+y^2+t^2+2xy-2xt-2yt\geqslant 0\\ (y+t-x)^2=x^2+y^2+t^2+2yt-2xt-2xy\geqslant 0\\ (x+t-y)^2=x^2+y^2+t^2+2xt-2xy-2ty\geqslant 0\end{cases},$

то, почленно складывая, получим

$$(x+y-t)^2+(y+t-x)^2+(x+t-y)^2=$$
$$=3x^2+3y^2+3t^2-2xy-2xt-2yt\geqslant 0.$$

Следовательно, необходимо доказать, что

$$3x^2+3y^2+3t^2-2xy-2xt-2yt\geqslant xy+yt+xt\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+t^2\geqslant xy+yt+xt\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2t^2\geqslant 2xy+2yt+2xt\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2t^2-2xy-2yt-2xt\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-t)^2+(y-t)^2\geqslant 0$ — истина, значит исходное неравенство верно, что и требовалось доказать.

8. В каких пределах меняются выражения

а) ab; б) $\dfrac{a}{b}$; в) $\dfrac{2a-b}{a+b}$,

если $\begin{cases} 3{,}2<a<4{,}5 \\ -3{,}9<b<-2{,}7 \end{cases}$?

а) Так как $-3{,}9<b<-2{,}7$, то $2{,}7<-b<3{,}9$ $(-b>0)$.

Так как $\begin{cases} 3{,}2<a<4{,}5 \\ 2{,}7<-b<3{,}9 \end{cases}$, то $3{,}2\cdot 2{,}7<a(-b)<4{,}5\cdot 3{,}9$,

т. е. $8{,}64<-ab<17{,}55$, тогда $\boxed{-17{,}55<ab<-8{,}64}$.

б) 1. Так как $2{,}7<-b<3{,}9$,

то $\dfrac{1}{3,9}<\dfrac{1}{-b}<\dfrac{1}{2{,}7}$, т. е. $\dfrac{10}{39}<\dfrac{1}{-b}<\dfrac{10}{27}$ $(-b>0)$.

2. $\begin{cases} 3{,}2<a<4{,}5 \\ \dfrac{10}{39}<\dfrac{1}{-b}<\dfrac{10}{27} \end{cases}$,

тогда $\dfrac{32}{10}\cdot\dfrac{10}{39}<\dfrac{a}{-b}<\dfrac{45}{10}\cdot\dfrac{10}{27}$, т. е. $\dfrac{32}{39}<-\dfrac{a}{b}<\dfrac{5}{3}$,

следовательно $\boxed{-\dfrac{5}{3}<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{32}{39}}$.

в) 1. Так как $\begin{cases} 6{,}4 < 2a < 9 \\ 2{,}7 < -b < 3{,}9 \end{cases}$, то $\underline{9{,}1 < 2a - b < 12{,}9}$.

2. Так как $\begin{cases} 3{,}2 < a < 4{,}5 \\ -3{,}9 < b < -2{,}5 \end{cases}$, то $-0{,}7 < a + b < 2$.

3. Разобьем промежуток $(-0{,}7; 2)$ на два: $(0; 2)$ и $(-0{,}7; 0)$.

Пусть $0 < a + b < 2$, тогда $\dfrac{1}{a+b} > \dfrac{1}{2}$ (при $a + b = 0$ дробь не существует).

4. Так как $\begin{cases} 9{,}1 < 2a - b < 12{,}9 \\ \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{a+b} \end{cases}$,

тогда $\dfrac{2a-b}{a+b} > \dfrac{91}{10} \cdot \dfrac{1}{2}$, т. е. $\underline{\dfrac{2a-b}{a+b} > \dfrac{91}{20}} = 4{,}55$.

5. Так как $-0{,}7 < a + b < 0$, то $0{,}7 > -(a + b) > 0$,

тогда $\dfrac{1}{-(a+b)} > 0{,}7$.

6. Так как $\begin{cases} 9{,}1 < 2a - b < 12{,}9 \\ 0{,}7 < \dfrac{1}{-(a+b)} \end{cases}$,

то $\dfrac{2a-b}{-(a+b)} > \dfrac{91}{10} \cdot \dfrac{7}{10} = \dfrac{637}{100} = 6{,}37$,

тогда $\dfrac{2a-b}{a+b} < -6{,}37$.

7. Объединяя оба решения, получим

$\boxed{\dfrac{2a-b}{a+b} < -6{,}37 \quad \text{или} \quad \dfrac{2a-b}{a+b} > 4{,}55}$.

Проверочная работа 1

Вариант I

Доказките:

1. Если $a > b$, то $\dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a}{b}$, где $b, c > 0$.

2. $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} \geqslant 2$.

3. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b) \geqslant 0$, где $a, b, c \geqslant 0$.

4. $(a+b)(a^4+b^4) \geqslant (a^2+b^2)(a^3+b^3)$, где $a, b \geqslant 0$.

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{2a+b}{3a-2b}$, если $\begin{cases} 2{,}1 < a < 2{,}7 \\ 2{,}6 < b < 3{,}2 \end{cases}$?

6. $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}} \leqslant 4{,}5$.

Вариант II

Докажите:

1. Если $a > b$, то $\dfrac{b+c}{a+c} > \dfrac{b}{a}$, где $a, b > 0$.

2. $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geqslant 2$.

3. $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc$, где $a, b, c \geqslant 0$.

4. $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqslant \dfrac{(a+b)^3}{8}$, где $a, b, c \geqslant 0$.

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{3a-2b}{2a-b}$, если $\begin{cases} 2{,}5 < a < 4{,}2 \\ 2{,}7 < b < 3{,}9 \end{cases}$?

6. $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{99^2} + \dfrac{1}{100^2} < \dfrac{3}{4}$.

Решение проверочной работы 1

Вариант I

Докажите:

1. Если $a > b$, то $\dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a}{b}$, где $b, c > 0$.

Пусть $\dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow \dfrac{a+c}{b+c} - \dfrac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{b(a+c)-a(b+c)}{(b+c)b} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{ba+bc-ab-ac}{(b+c)b} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{bc-ac}{(b+c)b} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c(b-a)}{(b+c)b} < 0$ —

истина, так как $b > 0$, $c > 0$ и $b < a$.

2. $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} \geqslant 2$.

Рассмотрим $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} - 2 = \dfrac{a^2+3-2\sqrt{a^2+2}}{\sqrt{a^2+2}} =$

$= \dfrac{a^2+2-2\sqrt{a^2+2}+1}{\sqrt{a^2+2}} = \dfrac{\left(\sqrt{a^2+2}-1\right)^2}{\sqrt{a^2+2}} \geqslant 0,$

значит $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} - 2 \geqslant 0$, т. е. $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} \geqslant 2$,

что и требовалось доказать.

3. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b) \geqslant 0$, где $a, b, c \geqslant 0$.

Тогда $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b) =$

$= \underline{a^2b} + \underline{\underline{b^2a}} + \underline{\underline{\underline{b^2c}}} + \underline{c^2b} + \underline{\underline{\underline{a^2c}}} + \underline{\underline{c^2a}} - \underline{2abc} - \underline{\underline{2abc}} - \underline{\underline{\underline{2abc}}} =$

$= b(a^2+c^2-2ac) + a(b^2+c^2-2bc) + c(b^2+a^2-2ab) =$

$= b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(b-a)^2 \geqslant 0$ — истина, так как $(a-c)^2 \geqslant 0$, $(b-c)^2 \geqslant 0$, $(b-a)^2 \geqslant 0$.

Верность исходного неравенства доказана.

4. $(a+b)(a^4+b^4) \geqslant (a^2+b^2)(a^3+b^3)$, где $a, b \geqslant 0$.

Рассмотрим $(a+b)(a^4+b^4)-(a^2+b^2)(a^3+b^3)=$
$=(a+b)(a^4+b^4)-(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)=$
$=(a+b)\big(a^4+b^4-(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)\big)=$
$=(a+b)(\underline{a^4}+\underline{\underline{b^4}}-\underline{a^4}+a^3b-2a^2b^2+ab^3-\underline{\underline{b^4}})=$
$=(a+b)(a^3b+ab^3-2a^2b^2)=(a+b)ab\cdot(a^2+b^2-2ab)=$
$=(a+b)ab(a-b)^2 \geqslant 0$ — истина, так как $a+b \geqslant 0$, $ab \geqslant 0$, $(a-b)^2 \geqslant 0$. Верность исходного неравенства доказана.

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{2a+b}{3a-2b}$, если $\begin{cases} 2{,}1 < a < 2{,}7 \\ 2{,}6 < b < 3{,}2 \end{cases}$?

а) Так как $\begin{cases} 4{,}2 < 2a < 5{,}4 \\ 2{,}6 < b < 3{,}2 \end{cases}$, то $\underline{6{,}8 < 2a+b < 8{,}6}$.

б) Так как $\begin{cases} 6{,}3 < 3a < 8{,}1 \\ -6{,}4 < -2b < -5{,}2 \end{cases}$, то $-0{,}1 < 3a-2b < 2{,}9$.

в) Разобьем промежуток $(-0{,}1; 2{,}9)$ на два: $(0; 2{,}9)$ и $(-0{,}1; 0)$.

Пусть $0 < 3a-2b < 2{,}9$, тогда $\dfrac{1}{3a-2b} > \dfrac{10}{29}$.

г) Так как $\begin{cases} 8{,}6 > 2a+b > 6{,}8 \\ \dfrac{1}{3a-2b} > \dfrac{10}{29} \end{cases}$, то $\underline{\dfrac{2a+b}{3a-2b} > \dfrac{68}{29}}$.

д) Пусть $-0{,}1 < 3a-2b < 0$, тогда $0{,}1 > -(3a-2b) > 0$.

е) Так как $0{,}1 > -(3a-2b) > 0$, то $\dfrac{1}{-(3a-2b)} > 10$.

ж) Так как $\begin{cases} 2a+b>6{,}8 \\ \dfrac{1}{-(3a-2b)}>0{,}1 \end{cases}$,

то $\dfrac{2a+b}{-(3a-2b}>68$, значит $\underline{\dfrac{2a+b}{3a-2b}<-68.}$

з) Объединяя два решения, получим

$$\boxed{\frac{2a+b}{3a-2b}<-68 \quad \text{или} \quad \frac{2a+b}{3a-2b}>\frac{68}{29}}.$$

6. $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}\leqslant 4{,}5.$

Домножим числитель и знаменатель каждой дроби на число, сопряженное знаменателю данной дроби. Тогда данное неравенство равносильно

$$\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\ldots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{97}}{99-97}\leqslant\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{97}-\sqrt{95}+\sqrt{99}-\sqrt{97}}{2}\leqslant\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{99}-1}{2}\leqslant\frac{9}{2}\Leftrightarrow\sqrt{99}-1\leqslant 9\Leftrightarrow\sqrt{99}\leqslant 10\Leftrightarrow 99\leqslant 100 -$$
истина.

Значит, $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}\leqslant 4{,}5$ – истина, что и требовалось доказать.

Вариант II

Доказите:

1. Если $a > b$, то $\dfrac{b+c}{a+c} > \dfrac{b}{a}$, где $a, c > 0$.

Пусть $\dfrac{b+c}{a+c} > \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{b+c}{a+c} - \dfrac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{a(b+c) - b(a+c)}{(a+c)a} =$

$= \dfrac{ab + ac - ba - bc}{(a+c)a} = \dfrac{ac - bc}{(a+c)a} = \dfrac{c(a-b)}{(a+c)a} > 0$ — истина, так как $a > b$, $c > 0$, $a > 0$.

2. $\dfrac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geqslant 2$.

Рассмотрим $\dfrac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} - 2 = \dfrac{a^2 + a + 2 - 2\sqrt{a^2 + a + 1}}{\sqrt{a^2 + a + 1}} =$

$= \dfrac{a^2 + a + 1 - 2\sqrt{a^2 + a + 1} + 1}{\sqrt{a^2 + a + 1}} = \dfrac{\left(\sqrt{a^2 + a + 1} - 1\right)^2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geqslant 0$ — истина, значит $\dfrac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

3. $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geqslant 6abc$, где $a, b, c \geqslant 0$.

Рассмотрим $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) - 6abc =$

$= \underline{ba^2} + \underline{\underline{ab^2}} + b^2c + \underline{c^2b} + a^2c + \underline{\underline{c^2a}} - \underline{2abc} - \underline{\underline{2abc}} - 2abc =$

$= (ba^2 + bc^2 - 2abc) + (ab^2 + ac^2 - 2abc) + (cb^2 + ca^2 - 2abc) =$

$= b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(b-a)^2 \geqslant 0$. Так как $a, b, c \geqslant 0$, то $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) - 6abc \geqslant 0$ — истина, что и требовалось доказать.

4. $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqslant \dfrac{(a+b)^3}{8}$, где $a, b \geqslant 0$.

Рассмотрим $\dfrac{a^3+b^3}{2} - \dfrac{(a+b)^3}{8} =$

$= \dfrac{a+b}{8}\big(4(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2\big) =$

$= \dfrac{a+b}{8}(4a^2-4ab+4b^2-a^2-2ab-b^2) = \dfrac{a+b}{8}\cdot 3(a^2-2ab+b^2) =$

$= \dfrac{3}{8}(a+b)\cdot(a-b)^2 \geqslant 0$, так как $a+b \geqslant 0$, $(a-b)^2 \geqslant 0$ при $a, b \geqslant 0$. Значит $\dfrac{a^3+b^3}{2} - \dfrac{(a+b)^3}{8} \geqslant 0$, т. е.

$\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqslant \dfrac{(a+b)^3}{8}$ — истина, что и требовалось доказать.

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{3a-2b}{2a-b}$,

если $\begin{cases} 2{,}5 < a < 4{,}2 \\ 2{,}7 < b < 3{,}9 \end{cases}$?

а) Так как $\begin{cases} 7{,}5 < 3a < 12{,}6 \\ -7{,}8 < -2b < -5{,}4 \end{cases}$, то $-0{,}3 < 3a-2b < 7{,}2$.

б) Так как $\begin{cases} 5{,}0 < 2a < 8{,}4 \\ -3{,}9 < -b < -2{,}7 \end{cases}$, то $1{,}1 < 2a-b < 5{,}7$.

в) Так как $1{,}1 < 2a-b < 5{,}7$, то $\dfrac{1}{5{,}7} < \dfrac{1}{2a-b} < \dfrac{1}{1{,}1}$,

т. е. $\dfrac{10}{57} < \dfrac{1}{2a-b} < \dfrac{10}{11}$.

г) Так как $-0{,}3 < 3a-2b < 7{,}2$, то промежуток $(-0{,}3; 7{,}2)$ разобьем на два промежутка: $[0; 7{,}2)$ и $(-0{,}3; 0)$.

д) Пусть

$\begin{cases} 0 \leqslant 3a-2b < 7{,}2 \\ \dfrac{10}{57} < \dfrac{1}{2a-b} < \dfrac{10}{11} \end{cases}$, тогда $\underline{0 \leqslant \dfrac{3a-2b}{2a-b} < \dfrac{72}{11}}$.

е) Пусть $-0{,}3 < 3a - 2b < 0$, тогда $0{,}3 > -(3a - 2b) > 0$.

ж) Так как $\begin{cases} 0 < -(3a-2b) < 0{,}3 \\ \dfrac{10}{57} < \dfrac{1}{2a-b} < \dfrac{10}{11} \end{cases}$, то

$$0 \cdot \frac{10}{57} < \frac{-(3a-2b)}{2a-b} < \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{11}, \text{ т. е. } 0 < -\frac{(3a-2b)}{2a-b} < \frac{3}{11},$$

значит $\underline{\dfrac{3a-2b}{2a-b} > -\dfrac{3}{11}}$.

з) Объединяя оба решения, получим

$$\boxed{-\frac{3}{11} < \frac{3a-2b}{2a-b} < \frac{72}{11}}.$$

6. $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{99^2} + \dfrac{1}{100^2} < \dfrac{3}{4}$.

Так как

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

....

$$\frac{1}{99^2} < \frac{1}{98\cdot 99} = \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$$

$$\frac{1}{100} < \frac{1}{99\cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

Почленно складывая, получим

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = 0{,}74,$$

так как остальные члены суммы ряда взаимно уничтожаются. Итак, учитывая, что $0{,}74 < 0{,}75 = \dfrac{3}{4}$,

$\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{99^2} + \dfrac{1}{100^2} < \dfrac{3}{4}$, что и требовалось доказать.

Тренировочная работа 3

Вариант I

Докажите:

1. Что больше: $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}$ или $2\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$?

2. $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}$, $a,b,c,d>0$.

3. $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2(a+d)^2(b+d)^2(c+d)^2\geqslant 2^{12}\cdot a^3b^3c^3d^3$, $a,b,c,d\geqslant 0$.

4. $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geqslant\frac{3}{2}$, $x,y,z>0$.

5. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<2$ для любых $n\in\mathbb{N}$.

Вариант II

Докажите:

1. Что больше: $\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}$ или $2\cdot\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$?

2. $\frac{a^3}{a^2+a\cdot b+b^2}+\frac{b^3}{b^2+b\cdot c+c^2}+\frac{c^3}{c^2+c\cdot a+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$, $a,b,c>0$.

3. $a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)\leqslant(1+a^4)\cdot(1+b^4)$, $a,b\geqslant 0$.

4. $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^4+b^4}{2}$, $a,b\geqslant 0$.

5. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2$ для любых $n\in\mathbb{N}$, где $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$.

Решение тренировочной работы 3

Вариант I

Доказите:

1. Что больше: $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}$ или $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$?

Положим $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = x$, тогда $x^3 = 2\frac{2}{7}$;

$2\sqrt[3]{\frac{2}{7}} = y$, тогда $y^3 = 2^3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$.

Получили $x^3 = y^3$, следовательно, $x = y$,

т. е. $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2 \cdot \sqrt{2\frac{2}{7}}$.

2. $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3}$, $a,b,c,d>0$.

Используя свойство ②, прибавим к обеим частям неравенства число 4.

$$\left(\frac{a}{b+c+d}+1\right)+\left(\frac{b}{a+c+d}+1\right)+$$
$$+\left(\frac{c}{a+b+d}+1\right)+\left(\frac{d}{a+b+c}+1\right) \geqslant \frac{4}{3}+4, \text{ тогда}$$

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\right) \geqslant \frac{16}{3}.$$

Так как

$$\underline{a}+\underline{\underline{c}}+\underline{\underline{\underline{d}}}+b+\underline{\underline{c}}+\underline{\underline{\underline{d}}}+\underline{a}+b+\underline{\underline{\underline{d}}}+\underline{a}+b+\underline{\underline{c}} = 3(a+b+c+d),$$

то

$$\big((b+c+d)+(a+c+d)+(a+b+d)+(a+b+c)\big) \times$$
$$\times\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\right) \geqslant 16.$$

Так как по теореме О. Коши

$$\begin{cases} \big((b+c+d)+(a+c+d)+(a+b+d)+(a+b+c)\big) \geqslant \\ \qquad \geqslant 4\cdot\sqrt[4]{(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d)(a+b+c)} \\ \left(\dfrac{1}{b+c+d}+\dfrac{1}{a+c+d}+\dfrac{1}{a+b+d}+\dfrac{1}{a+b+c}\right) \geqslant \\ \qquad \geqslant 4\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{b+c+d}\cdot\dfrac{1}{a+c+d}\cdot\dfrac{1}{a+b+d}\cdot\dfrac{1}{a+b+c}} \end{cases},$$

то, перемножив почленно обе части неравенств, используя свойство ⑥, получим

$$\big((b+c+d)+(a+c+d)+(a+b+d)+(a+b+c)\big)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 16\cdot\sqrt[4]{\frac{(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d)(a+b+c)}{(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d)(a+b+c)}}=16,$$

что и требовалось доказать.

3. $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2(a+d)^2(b+d)^2(c+d)^2 \geqslant 2^{12}\cdot a^3b^3c^3d^3$, $a,b,c,d\geqslant 0$.

Так как по теореме О. Коши $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$, где $x,y\geqslant 0$,

то $\begin{cases} (a+b)^2\geqslant 2^2ab \\ (b+c)^2\geqslant 2^2bc \\ (a+c)^2\geqslant 2^2ac \\ (a+d)^2\geqslant 2^2ad \\ (b+d)^2\geqslant 2^2bd \\ (c+d)^2\geqslant 2^2cd \end{cases}.$

Значит, почленно перемножая, по свойству ④ получим

$$(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2(a+d)^2(b+d)^2(c+d)^2\geqslant 12^{12}\cdot a^3b^3c^3d^3,$$

что и требовалось доказать.

4. $\dfrac{y+z-x}{2x}+\dfrac{x+z-y}{2y}+\dfrac{x+y-z}{2z}\geqslant\dfrac{3}{2},\ x,y,z>0.$

Используя свойство ②, прибавим к обеим частям неравенства число 3.

$$\left(\frac{y+z-x}{2x}+1\right)+\left(\frac{x+z-y}{2y}+1\right)+\left(\frac{x+y-z}{2z}+1\right)\geqslant$$

$\geqslant\dfrac{3}{2}+3$, тогда $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{2z}\right)\geqslant\dfrac{9}{2}.$

Используя свойство ③, умножим обе части неравенства на 2, получим $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geqslant 9.$

По теореме О. Коши $\begin{cases} x+y+z\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{xyz} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{1}{z}}\end{cases}.$

Используя свойство ⑥, перемножим обе части неравенства, получим

$$(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9\cdot\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}=9,$$

что и требовалось доказать.

5. $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)^2}+\dfrac{1}{n^2}<2$ для любых $n\in\mathbb{N}$.

Очевидно, что при $n=1$ $\ 1<2$, т. е. неравенство верно.

Пусть $n\geqslant 2$. Так как

$\dfrac{1}{2^2}<\dfrac{1}{1\cdot 2}$

$\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{1}{2\cdot 3}$

. . . .

$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{(n-1)n},$

то $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}.$

С другой стороны, любую дробь вида $\dfrac{1}{(k-1)k}$ можно представить в виде $\dfrac{1}{(k-1)k}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$, тогда

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
....
$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Тогда по свойству 6,

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$=1+1-\dfrac{1}{n}=2-\dfrac{1}{n}<2$, т. е. получим

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2.$$

Значит, $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<2$, что и требовалось доказать.

Более строгое и логически безупречное доказательство возможно только при применении методов математической индукции (см. следующую главу данной книги).

Вариант II

Докажите:

1. Что больше: $\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}$ или $2\cdot\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$?

Положим $\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=x$ и $2\cdot\sqrt[5]{\frac{2}{31}}=y$,

тогда $x^5=2\frac{2}{31}$ и $y^5=2^5\cdot\frac{2}{31}=\frac{64}{31}=2\frac{2}{31}$.

Значит $x^5=y^5$, следовательно $x=y$, т. е. $\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\cdot\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$.

2. $\dfrac{a^3}{a^2+a\cdot b+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+b\cdot c+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+c\cdot a+a^2}\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}$, $a,b,c>0$.

Поделим числитель первой дроби на a^2+ab+b^2, второй дроби на b^2+bc+c^2, третьей дроби на c^2+ca+a^2, получим:

$$\begin{array}{r|l} -\,a^3 & a^2+ab+b^2 \\ \cline{2-2} \underline{a^3+a^2b+ab^2} & a \\ -a^2b-ab^2 & \end{array}$$

Тогда $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}=a-\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2+ab+b^2}=a-\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$.

Так как $a^2+ab+b^2\geqslant 3ab$ равносильно $(a-b)^2\geqslant 0$, то

$\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}\leqslant\dfrac{1}{3ab}$. Тогда $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\leqslant\dfrac{ab(a+b)}{3ab}=\dfrac{a+b}{3}$,

следовательно $-\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geqslant-\dfrac{a+b}{3}$.

По свойству 2, $a-\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b}\geqslant a-\dfrac{a+b}{3}$.

Аналогично рассуждая, получим:

$$\frac{b^3}{b^2+bc+b^2}=b-\frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2}\geqslant b-\frac{b+c}{3};$$

$$\frac{c^3}{a^2+ac+c^2}=c-\frac{ac(a+c)}{a^2+ac+c^2}\geqslant c-\frac{a+c}{3}.$$

Складывая почленно, получим:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant$$

$$\geqslant a+b+c-\frac{a+b+b+c+a+c}{3}=\frac{a+b+c}{3},$$

т. е. $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}$, что и требовалось доказать.

3. $a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)\leqslant(1+a^4)\cdot(1+b^4),\ \ a,b\geqslant 0.$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)}{(1+a^4)(1+b^4)}\leqslant 1,\text{ т. е. }\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{b^2}{1+b^4}\leqslant 1.$$

Так как по следствию **2**

если $1+a^4\geqslant 2a^2$, что верно, то $\dfrac{1}{1+a^4}\leqslant\dfrac{1}{2a^2}$ (при $a\neq 0$), тогда $\dfrac{a^2}{1+a^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$;

если $1+b^4\geqslant 2b^2$, что верно, то $\dfrac{1}{1+b^4}\leqslant\dfrac{1}{2b^2}$ (при $b\neq 0$), тогда $\dfrac{b^2}{1+b^4}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Почленно складывая, получим: $\dfrac{a^2}{1+a^4}+\dfrac{b^2}{1+b^4}\leqslant 1$ — верно, значит $a^2(1+b^4)+b^2(1+a^4)\leqslant(1+a^4)(1+b^4)$ — верно. Отметим, что при $a=0$ — исходное неравенство верно и при $b=0$ — исходное неравенство верно, следовательно, исходное неравенство верно при любых значениях a и b.

4. $\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3}{2}\leqslant\dfrac{a^4+b^4}{2}$, $a,b\geqslant 0$.

Данное неравенство равносильно

$(a+b)(a^3+b^3)\leqslant 2(a^4+b^4)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+a^3b+b^3a\leqslant 2a^4+2b^4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4-a^3b+b^4-b^3a\geqslant 0\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^3-b^3)\geqslant 0\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geqslant 0$ — истина,

так как $\begin{cases}(a-b)^2\geqslant 0\\ a^2+ab+b^2\geqslant 0\end{cases}$ при любых значениях a,b, что и требовалось доказать.

5. $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}<2$ для любых $n\in\mathbb{N}$, где $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Очевидно, что при $n=1$ $1<2$ — т. е. неравенство верно.

Рассмотрим неравенство при $n\geqslant 2$.

Так как

$$\frac{1}{2!}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3}$$

....

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

то, почленно складывая, получим

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Очевидно, правая часть неравенства есть сумма первых n членов геометрической прогрессии

$a_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, где $b_1=1$, а $q=\dfrac{1}{2}$. Таким образом,

$$1+\frac{1}{2^1}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

Тогда $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} < 2$,

т. е. $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < 2$, что и требовалось доказать.

Более строгое и логически безупречное доказательство возможно только при применении методов математической индукции (см. следующую главу данной книги).

Проверочная работа 2

Вариант I

Доказите:

1. $a^{10} + \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{4}{a} \geqslant 8;\ a > 0.$

2. $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2.$

3. $(a^4 + b^4)^3 \leqslant (a^3 + b^3)^4;\ \ a, b \geqslant 0.$

4. $\dfrac{3}{a+b+c} < \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c};\ a, b, c > 0.$

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{xy}{5\sqrt{x} - y}$, если $\begin{cases} 0{,}64 < x < 0{,}81 \\ 3 < y < 6 \end{cases}$?

Вариант II

Докажите:

1. $a^{40} + \dfrac{1}{a^{16}} + \dfrac{2}{a^4} + \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{8}{a} \geqslant 16;\ a > 0.$

2. $a + b + c + 3 \geqslant 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c});\ \ a, b, c \geqslant 0.$

3. $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$

4. $\dfrac{x}{x^4 + y^2} + \dfrac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{xy};\ x, y > 0.$

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{1}{x - y^2}$, если $\begin{cases} 3 < x < 5 \\ -1 < y < 2 \end{cases}$?

Решение проверочной работы 2

Вариант I

Доказите:

1. $a^{10}+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{4}{a}\geqslant 8;\ a>0.$

$$a^{10}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a}=a^{10}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}$$

(8 слагаемых).

По теореме О. Коши при $n=8$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_8}{8}\geqslant\sqrt[8]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_8},$$

т. е. $a^{10}+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{4}{a}\geqslant\sqrt[8]{a^{10}\cdot\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{a}}=8,$

Значит $a^{10}+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{4}{a}\geqslant 8$, что и требовалось доказать.

2. $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2.$

Так как $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$, то
$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geqslant 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(c^2-2bc+b^2)+(a^2-2ac+c^2)\geqslant 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-b)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\geqslant 0$ — истина, значит $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$ — верно, что и требовалось доказать.

3. $(a^4+b^4)^3\leqslant(a^3+b^3)^4;\ \ a,b\geqslant 0.$

а) Так как $(x+y)^4=x^4+4x^3\cdot y+6x^2\cdot y^2+4x\cdot y^3+y^4$ (см. Шахмейстер А. Х. Уравнения. СПб. — М., 2016. С. 139), то $(a^3+b^3)^4=$

$$=(a^3)^4+4(a^3)^3\cdot b^3+6(a^3)^2\cdot(b^3)^2+4a^3\cdot(b^3)^3+(b^3)^4=$$
$$=a^{12}+4\cdot a^9\cdot b^3+6\cdot a^6\cdot b^6+4\cdot a^3\cdot b^9+b^{12}.$$

б) $(a^4+b^4)^3=(a^4)^3+3(a^4)^2\cdot b^4+3\cdot a^4\cdot(b^4)^2+(b^4)^3=$
$=a^{12}+3a^8b^4+3a^4b^8+b^{12}.$

в) Тогда $\underline{a^{12}}+3a^8b^4+3a^4b^8+\underline{\underline{b^{12}}}\leqslant$

$$\leqslant\underline{a^{12}}+4a^9b^3+6a^6b^6+4a^3b^9+\underline{\underline{b^{12}}}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4a^9b^3-3a^8b^4-3a^4b^8+6a^6b^6+4a^3b^9\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3b^3(4a^6-3a^5b-3ab^5+6a^3b^3+4b^6)\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^3b^3(4a^6-3ab(a^4-2a^2b^2+b^4)+4b^6)\geqslant 0.$

г) Докажем, что $4(a^6+b^6)\geqslant 3ab(a^4-2a^2b^2+b^4)$.

Известно, что $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3$.

$4(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)>3ab(a^4-2a^2b^2+b^4)$.

Так как $4(a^2+b^2)\geqslant 8ab\geqslant 3ab$,

то $4(a^2+b^2)\geqslant 3ab$ — верно.

С другой стороны, $a^4-a^2b^2+b^4\geqslant a^4-2a^2b^2+b^4$ — верное утверждение, следовательно, почленно перемножая, получим

$4(a^2+b^2)(a^2-a^2b^2+b^4)\geqslant 3ab(a^4-2a^2b^2+b^4)$ — истина.

Значит $a^3b^3(4a^6-3ab(a^4-2a^2b^2+b^4)+4b^6)\geqslant 0$ — истина.

Тогда, рассуждая в обратном порядке на уровне равносильности, придем к верности $(a^4+b^4)^3\leqslant(a^3+b^3)^4$, что и требовалось доказать.

4. $\dfrac{3}{a+b+c}<\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c};\ a,b,c>0.$

Так как

$a+b+c>a+b$, то по следствию **2** $\dfrac{1}{a+b+c}<\dfrac{1}{a+b};$

$a+b+c>a+c$, то по следствию **2** $\dfrac{1}{a+b+c}<\dfrac{1}{a+c};$

$a+b+c>b+c$, то по следствию **2** $\dfrac{1}{a+b+c}<\dfrac{1}{b+c}.$

Тогда, почленно складывая, учитывая свойство (5), получим

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c},$$

т. е. $\dfrac{3}{a+b+c}<\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}$,

что и требовалось доказать.

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{xy}{5\sqrt{x}-y}$, если $\begin{cases} 0{,}64<x<0{,}81 \\ 3<y<6 \end{cases}$?

а) Так как $\begin{cases} 0{,}64<x<0{,}81 \\ 3<y<6 \end{cases}$, то $1{,}96<xy<4{,}86$.

б) Так как $0{,}64<x<0{,}81$, то $0{,}8<\sqrt{x}<0{,}9$, значит $4<5\sqrt{x}<4{,}5$.

в) Так как $3<y<6$, то $-6<-y<-3$.

г) Так как $\begin{cases} 4<5\sqrt{x}<4{,}5 \\ -6<-y<-3 \end{cases}$, то $-2<5\sqrt{x}-y\leqslant 1{,}5$.

д) Разобьем промежуток $(-2;1{,}5)$ на два:

$(0;1{,}5)$ и $(-2;0)$.

При $5\sqrt{x}-y=0$ выражение не определено.

1. Пусть $0<5\sqrt{x}-y<1,5$, тогда $\dfrac{1}{5\sqrt{x}-y}>\dfrac{1}{1,5}=\dfrac{2}{3}$.

2. Так как $\begin{cases} 1{,}96<xy<4{,}86 \\ \dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{5\sqrt{x}-y} \end{cases}$,

то $\dfrac{xy}{5\sqrt{x}-y}>\dfrac{2\cdot 1{,}96}{3}=\dfrac{196}{150}=\dfrac{98}{75}$, т. е. $\underline{\dfrac{xy}{5\sqrt{x}-y}>\dfrac{98}{75}}$.

е) Пусть $-2 < 5\sqrt{x} - y < 0$.

Тогда $0 < -(5\sqrt{x} - y) < 2$, значит $\dfrac{1}{-(5\sqrt{x} - y)} > \dfrac{1}{2}$.

Так как $\begin{cases} 1{,}96 < xy < 4{,}86 \\ \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{-(5\sqrt{x} - y)} \end{cases}$, то $\dfrac{xy}{-(5\sqrt{x} - y)} > 0{,}98$,

значит $\underline{\dfrac{xy}{5\sqrt{x} - y} < -0{,}98} = -\dfrac{49}{50}$.

ж) Объединяя оба решения, получим

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{xy}{5\sqrt{x} - y} < -\dfrac{49}{50} \quad \text{или} \quad \dfrac{xy}{5\sqrt{x} - y} > \dfrac{98}{75}, \\ \text{если } 0{,}64 < x < 0{,}81;\ \ 3 < y < 6 \end{array}}.$$

Вариант II

Докажите:

1. $a^{40}+\dfrac{1}{a^{16}}+\dfrac{2}{a^4}+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{8}{a}\geqslant 16;\ a>0.$

$$a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}=a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+$$

$$+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ (16\text{ слагаемых}).$$

Тогда, используя теорему О. Коши при $n=16$

$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{16}}{16}\geqslant\sqrt[16]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{16}}$, получим:

$$a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geqslant$$

$$\geqslant 16\cdot\sqrt[16]{a^{40}\cdot\frac{1}{a^{16}}\cdot\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a}}=16,$$

т. е. $a^4+\dfrac{1}{a^{16}}+\dfrac{2}{a^4}+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{8}{a}\geqslant 16$ — истина, что и требовалось доказать $\left(a^{40}\cdot a^{-16}\cdot(a^{-4})^2\cdot(a^{-2})^4\cdot(a^{-1})^8=a^0=1\right)$.

2. $a+b+c+3\geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c});\ \ a,b,c\geqslant 0.$

$$a+b+c+3=(a+1)+(b+1)+(c+1);\qquad \begin{cases}a+1\geqslant 2\sqrt{a}\\ b+1\geqslant 2\sqrt{b}\\ c+1\geqslant 2\sqrt{c}\end{cases}.$$

Почленно складывая полученные неравенства, получим:

$(a+1)+(b+1)+(c+1)\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}.$

Значит $a+b+c+3\geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$ — истина, что и требовалось доказать.

3. $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$.

(Это теорема Буняковского при $n=3$, она будет рассмотрена в главе 2.)

Известно, что

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = \left(\underline{a_1b_1}\right)^2 + \left(\underline{\underline{a_2b_2}}\right)^2 + \left(\underline{\underline{\underline{a_3b_3}}}\right)^2 + $$

$$+2a_1b_1\cdot a_2b_2 + 2a_1b_1\cdot a_3b_3 + 2a_2b_2\cdot a_3b_3;$$

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right) =$$

$$= \underline{a_1^2b_1^2} + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + \underline{\underline{a_2^2b_2^2}} + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + \underline{\underline{\underline{a_3^2b_3^2}}}.$$

Полученные подчеркнутые одночлены, находясь в разных частях неравенства, взаимоуничтожаются, тогда

$$\underline{2a_1b_1a_2b_2} + \underline{\underline{2a_1b_1a_3b_3}} + \underline{\underline{\underline{2a_2b_2a_3b_3}}} \leqslant$$

$$\leqslant \underline{a_1^2b_2^2} + \underline{\underline{a_1^2b_3^2}} + \underline{a_2^2b_1^2} + \underline{\underline{\underline{a_2^2b_3^2}}} + \underline{\underline{a_3^2b_1^2}} + \underline{\underline{\underline{a_3^2b_2^2}}}.$$

Перенеся выражения из левой части в правую, группируя одинаково подчеркнутые одночлены, получим $(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2 \geqslant 0$ — истина, значит в силу равносильности преобразований исходное неравенство верно, что и требовалось доказать

4. $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2}\leqslant\dfrac{1}{xy}$, $x,y>0$.

По следствию **2** если $\begin{cases} x^4+y^2\geqslant 2x^2y \\ y^4+x^2\geqslant 2y^2x \end{cases}$,

то $\begin{cases} \dfrac{1}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2x^2y} \\ \dfrac{1}{y^4+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2y^2x} \end{cases}$, значит $\begin{cases} \dfrac{x}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2xy} \\ \dfrac{y}{y^4+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2xy} \end{cases}$.

Почленно складывая, получим

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leqslant\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{1}{xy},$$

т. е. $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2}\leqslant\dfrac{1}{xy}$, что и требовалось доказать.

5. В каких пределах меняется выражение $\dfrac{1}{x-y^2}$, если $\begin{cases} 3 < x < 5 \\ -1 < y < 2 \end{cases}$?

а) Разобьем промежуток $(-1; 2)$ на два $[0; 2)$ и $(-1; 0)$.

1. Пусть $0 \leqslant y < 2$, тогда $0 \leqslant y^2 < 4$, значит $-4 < -y^2 \leqslant 0$.
2. Так как $\begin{cases} 3 < x < 5 \\ -4 < -y^2 \leqslant 0 \end{cases}$, то $\underline{-1 < x - y^2 < 5}$.

б) Так как $-1 < x - y^2 < 5$, то разобьем промежуток $(-1; 5)$ на два: $(0; 5)$ и $(-1; 0)$.

1. Пусть $0 < x - y^2 < 5$, тогда $\dfrac{1}{x-y^2} > \dfrac{1}{5}$ (при $x - y^2 = 0$ дробь не определена).
2. Пусть $-1 < x - y^2 < 0$, тогда $0 < -(x - y^2) < 1$, т. е. $\dfrac{1}{-(x-y^2)} > 1$ или $\underline{\dfrac{1}{x-y^2} < -1}$.

Объединяя два решения, получим

$$\underline{\frac{1}{x-y^2} < -1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{x-y^2} > \frac{1}{5} \text{ при } 3 < x < 5;\ 0 \leqslant y < 2.}$$

в) Пусть $-1 < y < 0$, тогда $1 > -y > 0$, значит $1 > y^2 > 0$, следовательно $-1 < -y^2 < 0$.

Так как $\begin{cases} -1 < -y^2 < 0 \\ 3 < x < 5 \end{cases}$, то $2 < x - y^2 < 5$,

значит $\underline{\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{x-y^2} < \dfrac{1}{2}}$, так как $\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{2}\right) \subset \left(\dfrac{1}{5}; \infty\right)$.

Объединяя все три решения, получим:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{если } 3 < x < 5 \text{ и } -1 < y < 2, \text{ то} \\[2ex] \dfrac{1}{x-y^2} < -1 \quad \text{или} \quad \dfrac{1}{x-y^2} > \dfrac{1}{5} \end{array}}.$$

Проверочная работа 3

Вариант I

Доказите:

1. $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$ при $x, y, z \geqslant 0$.

2. $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 9abc$ при $a, b, c \geqslant 0$.

3. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ при $a, b, c > 0$.

4. $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2014}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 2013}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 2012}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2014\cdot 1}} \geqslant 2\cdot\dfrac{2014}{2015}$.

Вариант II

Докажите:

1. $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant 2(a+b)(b+c)(a+c)$ при $a, b, c \geqslant 0$.

2. $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leqslant xyz$ при $x, y, z \geqslant 0$.

3. $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geqslant \dfrac{x+y+z}{3}$ при $x, y, z > 0$.

4. $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\dfrac{120}{121} > \dfrac{1}{11}$.

Вариант III

Докажите:

1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqslant 3$ при $a,b,c>0$.

2. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$ при $a,b,c>0$.

3. $8\left(a^3+b^3+c^3\right)\geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a)$ при $a,b,c\geqslant 0$.

4. $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)$.

5. В каких пределах изменяется выражение $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$, если $\begin{cases}1{,}2<a<2{,}1\\1{,}7<b<1{,}9\end{cases}$?

Вариант IV

Докажите:

1. $\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}$ при $a,b,c>0$.

2. $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geqslant(a+b+c)(ab+bc+ca)$ при $a,b,c\geqslant 0$.

3. $9\left(a^3+b^3+c^3\right)\geqslant(a+b+c)^3$ при $a,b,c\geqslant 0$.

4. $\dfrac{a+b}{1+a+b}\leqslant\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}$ при $a,b\geqslant 0$.

5. В каких пределах изменяется дробь $\dfrac{ab}{ab-a^2}$, если $\begin{cases}1{,}2<a<2{,}1\\1{,}7<b<1{,}9\end{cases}$?

Решение проверочной работы 3

Вариант I

Доказките:

1. $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$ при $x, y, z \geqslant 0$.

а) Возведем обе части неравенства в третью степень. Так как степень возведения нечетная, то получим неравенство, равносильное исходному, т. е. $\dfrac{(x+y+z)^3}{27} \geqslant xyz$ или $(x+y+z)^3 \geqslant 27xyz$,

где $\sigma_1 = x+y+z$ и $\sigma_3 = xyz$ (простейшие симметрические многочлены с тремя неизвестными).

Ранее мы доказали, что $\sigma_1^3 \geqslant 27\sigma_3$ (с. 35, пример 4).

б) Можно сразу использовать теорему О. Коши для $n=3$.

2. $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 9abc$ при $a, b, c \geqslant 0$.

По теореме О. Коши для $n=3$ $\begin{cases} a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \\ a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases}$.

По свойству ⑥

$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 3 \cdot 3\sqrt[3]{abc \cdot a^2b^2c^2} = 9abc$,

т. е. $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 9abc$ — истина, что и требовалось доказать.

3. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ при $a, b, c > 0$.

По теореме О. Коши $\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}} \\ \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{c}} = \dfrac{1}{\sqrt{ac}} \\ \dfrac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2} \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}} = \dfrac{1}{\sqrt{bc}} \end{cases}$.

По свойству 5 тогда

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}+\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}},$$

т. е. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}$,

что и требовалось доказать.

4. $$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2014}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2013}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2012}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014\cdot 1}}\geqslant 2\cdot\frac{2014}{2015}.$$

Так как теорема О. Коши при $n=2$ имеет разные виды, т. е. $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, или $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, или $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}>\dfrac{2}{a+b}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2014}}\geqslant\frac{2}{1+2014}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2013}}\geqslant\frac{2}{2+2013}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2012}}\geqslant\frac{2}{3+2012}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{\sqrt{2014\cdot 1}}\geqslant\frac{2}{2014+1},$$

значит, почленно складывая полученные неравенства и используя свойство 5, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2014}}+\frac{2}{\sqrt{2\cdot 2013}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2014\cdot 1}}\geqslant 2\cdot\frac{2014}{2015}.$$

Тем самым мы доказали верность исходного неравенства, что и требовалось.

Вариант II

Доказите:

1. $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geqslant 2(a+b)(b+c)(a+c);\quad a,b,c\geqslant 0.$

Так как $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$, то исходное неравенство равносильно

$$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)-\left(a^3+b^3+c^3\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2(a+b)(b+c)(a+c)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 2(a+b)(b+c)(a+c)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 0$ — истина, значит исходное неравенство равносильно истинному утверждению, что и требовалось доказать.

2. $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\leqslant xyz;\quad x,y,z\geqslant 0.$

Исследуем это неравенство по знакам сомножителей левой части исходного неравенства, понимая, что правая часть неравенства неотрицательна.

а) Пусть $\begin{cases} x+y-z\geqslant 0\\ y+z-x\geqslant 0\\ z+x-y\geqslant 0\end{cases}$. Так как $\begin{cases}(x-z)^2\geqslant 0\\ (y-x)^2\geqslant 0\\ (z-y)^2\geqslant 0\end{cases}$,

то по свойству 2 $\begin{cases} y^2+(x-z)^2\geqslant y^2\\ z^2+(y-x)^2\geqslant z^2\\ x^2+(z-y)^2\geqslant x^2\end{cases}$, тогда

$$\begin{cases} y^2\geqslant y^2-(x-z)^2=(y+z-x)(y+x-z)\geqslant 0\\ z^2\geqslant z^2-(y-x)^2=(z+x-y)(z+y-x)\geqslant 0\\ x^2\geqslant x^2-(z-y)^2=(x+y-z)(x+z-y)\geqslant 0\end{cases}.$$

Следовательно, учитывая свойство 6 и условия данного случая, получим

$$x^2\cdot y^2\cdot z^2\geqslant (y+z-x)^2(z+x-y)^2(x+y-z)^2.$$

Но так как по условию $\begin{cases} x+y-z\geqslant 0\\ y+z-x\geqslant 0\\ z+x-y\geqslant 0\end{cases}$,

то $xyz\geqslant (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ — истина.

б) Пусть $\begin{cases} x+y-z \leqslant 0 \\ y+z-x \leqslant 0 \\ z+x-y \leqslant 0 \end{cases}.$

Тогда, используя свойство ⑤, почленно сложим правые и левые части неравенств, получим $x+y+z \leqslant 0$, что верно только если $x=y=z=0$. Тогда при $xyz \neq 0$ исходное неравенство — ложно.

в) Пусть любые два сомножителя левой части исходного неравенства неотрицательны, а третий сомножитель неположителен.

Например, $\begin{cases} x+y-z \geqslant 0 \\ y+z-x \geqslant 0 \\ z+x-y \leqslant 0 \end{cases},$

тогда $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leqslant 0$, но $xyz \geqslant 0$, значит $xyz \geqslant (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$, — что верно.

Аналогично верно утверждение и для любых других пар сомножителей, соответствующих условию данного пункта.

г) Пусть любые два сомножителя левой части исходного неравенства неположительны, а третий сомножитель неотрицательный.

Например, $\begin{cases} x+y-z \leqslant 0 \\ y+z-x \leqslant 0 \\ z+x-y \geqslant 0 \end{cases}.$

Используя свойство ⑤, сложим почленно первые два неравенства, получим

$\begin{cases} 2y \leqslant 0 \\ z+x-y \geqslant 0 \end{cases},$ но при $y \neq 0$ $y<0$ — ложь (см. условие).

Аналогичное утверждение ложно и для любых других пар сомножителей при $xyz \neq 0$, соответствующих условию данного пункта.

Вывод: при любых $x, y, x \geqslant 0$ исходное неравенство верно, что и требовалось доказать.

3. $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geqslant \dfrac{x+y+z}{3}$ при $x, y, z > 0$.

Так как $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2 \Leftrightarrow \left(a^3+b^3\right)-\left(a^2b+ab^2\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)ab \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-2ab+b^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geqslant 0$ — истина, то применим трижды истинность этого неравенства:

$$\begin{cases} x^3+y^3 \geqslant x^2y+xy^2 \\ x^3+z^3 \geqslant x^2z+xz^2 \\ y^3+z^3 \geqslant y^2z+yz^2 \end{cases}.$$

По свойству 5

$2(x^3+y^3+z^3) \geqslant x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2$ — истина,

тогда $2(x^3+y^3+z^3) \geqslant x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)$ — истина.

Используя свойство 2, прибавим к обеим частям $(x^3+y^3+z^3)$, т. е. $3(x^3+y^3+z^3) \geqslant$

$\geqslant (x^2(y+z)+x^3)+(y^2(x+z)+y^3)+(z^2(x+y)+z^3)$ — истина $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3+y^3+z^3\right) \geqslant$$
$$\geqslant x^2(x+y+z)+y^2(x+y+z)+z^2(x+y+z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3+y^3+z^3\right) \geqslant (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \geqslant \dfrac{x+y+z}{3}$ — истина,

что и требовалось доказать.

4. $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\dfrac{120}{121} > \dfrac{1}{11}$.

Пусть $\begin{cases} a = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\dfrac{120}{121} \\ b = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{119}{120} \end{cases}$, тогда так как

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$
$$\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$
$$\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{120}{121} > \frac{119}{120},$$

то $a > b$, тогда $a^2 > ab$.

Учтем, что $a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}$,

следовательно, $a^2 > \frac{1}{121}$, т. е. $a > \frac{1}{11}$.

Таким образом, мы доказали, что $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$, что и требовалось.

Вариант III

Доказите:

1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqslant 3;\ a,b,c>0.$

По теореме О. Коши при $n=3\quad a_1+a_2+a_3\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$,

т. е. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}=3.$

Значит $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geqslant 3$, что и требовалось доказать.

2. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2};\ a,b,c>0.$

По свойству 2 исходное неравенство равносильно

$$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{a+c}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)\geqslant\frac{3}{2}+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant 9.$$

Докажем, что данное неравенство верно.

Так как $2(a+b+c)=(b+c)+(a+c)+(a+b)$

и по теореме О. Коши

$$\begin{cases}(b+c)+(a+c)+(a+b)\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{(b+c)\cdot(a+c)\cdot(a+b)}\\ \dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{b+c}\cdot\dfrac{1}{a+c}\cdot\dfrac{1}{a+b}}\end{cases},$$

то по свойству ⑥ получим:

$$((b+c)+(a+c)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 9\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{a+c}\cdot\frac{1}{a+b}}=9,$$

т. е. $2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant 9$ — истина, что и требовалось доказать.

3. $8(a^3+b^3+c^3)\geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a);\quad a,b,c\geqslant 0.$

а) Так как $\begin{cases} a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2\\ a^3+c^3\geqslant a^2c+ac^2\\ b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2\end{cases}$, что доказано в примере 3 варианта II, то по свойству ⑤

$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c).$

б) С другой стороны, по теореме О. Коши при $n=3$

$a^3+b^3+c^3\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc.$

в) Используя пункт а), получим:

$$\begin{cases} 6\left(a^3+b^3+c^3\right)\geqslant 3\big(ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)\big)\\ 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\geqslant 6abc\end{cases}.$$

г) По свойству ⑤ получим

$$8(a^3+b^3+c^3)\geqslant 3\big(ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)+2abc\big)=$$

$$=3\big(ab(\underline{a+b+c})+ac(\underline{a+b+c})+bc(b+c)\big)=$$

$$=3\big((a+b+c)(ab+ac)+bc(b+c)\big)=$$

$$=3\big((a+b+c)(\underline{b+c})a+bc(\underline{b+c})\big)=$$

$$=3(b+c)(\underline{a^2+ab}+\underline{\underline{ac+bc}})=$$

$$=3(b+c)\big(a(a+b)+c(a+b)\big)=3(b+c)(a+b)(a+c),$$

т. е. $8(a^3+b^3+c^3)\geqslant 3(a+b)(b+c)(a+c)$, что и требовалось доказать.

4. $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.

а) *Первый способ*

Так как $(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 \geqslant 0$ для любых x, то $\underline{a_1^2x^2} + \underline{\underline{2a_1b_1x}} + b_1^2 + \underline{a_2^2x^2} + \underline{\underline{2a_2b_2x}} + b_2^2 \geqslant 0$.

Группируя, получим
$(a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)x + b_1^2 + b_2^2 \geqslant 0$.

Для того чтобы данный квадратный трехчлен был всегда неотрицательным, необходимо,

чтобы $\begin{cases} a = a_1^2 + a_2^2 > 0 \\ D \leqslant 0 \qquad (D = b^2 - 4ac) \end{cases}$,

где $D = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \leqslant 0$,

т. е. $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.

Отметим, что если $a_1^2 + a_2^2 = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = 0$, то исходное неравенство верно, так как
$(0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2)^2 \leqslant (0 + 0)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$ или $0 \leqslant 0$, что верно.

б) *Второй способ*

Исходное неравенство
$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underline{a_1^2b_1^2} + 2a_1b_1a_2b_2 + \underline{\underline{a_2^2b_2^2}} \leqslant \underline{a_1^2b_1^2} + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + \underline{\underline{a_2^2b_2^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_1^2b_2^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a_2b_1 - a_1b_2)^2 \geqslant 0$ — истина, значит $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$ — верно, что и требовалось доказать.

5. В каких пределах изменяется выражение $\dfrac{ab}{a^2 - b^2}$, если
$\begin{cases} 1{,}2 < a < 2{,}1 \\ 1{,}7 < b < 1{,}9 \end{cases}$?

а) Так как $\begin{cases} 1{,}2 < a < 2{,}1 \\ 1{,}7 < b < 1{,}9 \end{cases}$,

то $1{,}2 \cdot 1{,}7 < ab < 2{,}1 \cdot 1{,}9$, т. е. $\underline{2{,}04 < ab < 3{,}99}$.

б) 1. Так как $2{,}89 < b^2 < 3{,}61$, то $-3{,}61 < -b^2 < -2{,}89$.

2. Так как $\begin{cases} 1{,}44 < a^2 < 4{,}41 \\ -3{,}61 < -b^2 < -2{,}89 \end{cases}$,

то $-2{,}17 < a^2 - b^2 < 1{,}52$.

в) Разобьем промежуток $(-2{,}17; 1{,}52)$ на два.

1. Пусть $0 < a^2 - b^2 < 1{,}52$,

тогда $\dfrac{1}{a^2 - b^2} > \dfrac{1}{1{,}52} = \dfrac{100}{152} = \dfrac{25}{38}$.

2. Так как $\begin{cases} 2{,}04 < ab < 3{,}99 \\ \dfrac{25}{38} < \dfrac{1}{a^2 - b^2} \end{cases}$,

тогда $\dfrac{204}{100} \cdot \dfrac{25}{38} < \dfrac{ab}{a^2 - b^2}$ или $\underline{\dfrac{ab}{a^2 - b^2} > \dfrac{51}{38}}$.

г) 1. Пусть $-2{,}17 < a^2 - b^2 < 0$, тогда $0 < -\left(a^2 - b^2\right) < 2{,}17$,

значит $\dfrac{1}{-(a^2 - b^2)} > \dfrac{1}{2{,}17} = \dfrac{100}{217}$.

2. Так как $\begin{cases} 2{,}04 < ab < 3{,}99 \\ \dfrac{100}{217} < \dfrac{1}{-(a^2 - b^2)} \end{cases}$,

тогда $\dfrac{ab}{-(a^2 - b^2)} > \dfrac{204}{100} \cdot \dfrac{100}{217}$.

Значит $\dfrac{ab}{-(a^2 - b^2)} > \dfrac{204}{217}$ или $\underline{\dfrac{ab}{a^2 - b^2} < -\dfrac{204}{217}}$.

Ответ: $\boxed{\dfrac{ab}{a^2 - b^2} < -\dfrac{204}{217} \text{ или } \dfrac{ab}{a^2 - b^2} > \dfrac{51}{38}}$.

Вариант IV

Доказите:

1. $\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}$; $a,b,c>0$.

Исходное неравенство равносильно

$2(a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)\geqslant 9.$

$2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(a+c)$, тогда по теореме О. Коши

$(a+b)+(b+c)+(a+c)\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c)}$;

$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a+b}\cdot\dfrac{1}{b+c}\cdot\dfrac{1}{a+c}}.$

Значит $\big((a+b)+(b+c)+(a+c)\big)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}\right)\geqslant$

$\geqslant 3\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)\cdot\dfrac{1}{a+b}\cdot\dfrac{1}{b+c}\cdot\dfrac{1}{a+c}}=9,$

т. е. $2(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}\right)\geqslant 9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b}\geqslant\dfrac{9}{a+b+c}$ —

истина, что и требовалось доказать.

2. $3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(ab+bc+ca)$; $a,b,c\geqslant 0$.

а) В примере 3 из варианта II было доказано, что $3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

б) Докажем, что $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

Так как $\begin{cases} a^2+b^2\geqslant 2ab\\ b^2+c^2\geqslant 2bc\\ a^2+c^2\geqslant 2ac\end{cases}$,

то, почленно складывая по свойству 5, получим

$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ac)$,

т. е. $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

в) Итак, $3(a^3+b^3+c^3) \geqslant (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant$
$\geqslant (a+b+c)(ab+bc+ac)$.

В силу транзитивности

$3\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant (a+b+c)(ab+bc+ac)$ — истина, что и требовалось доказать.

3. $9\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant (a+b+c)^3;\;\; a,b,c \geqslant 0.$

а) В примере 3 из варианта III было доказано, что
$8(a^3+b^3+c^3) \geqslant 3(a+b)(b+c)(a+c)$.

б) Известно, что
$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$.
Тогда $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(a+c)$.

в) Так как

$$\begin{cases} 8\left(a^3+b^3+c^3\right) \geqslant 3(a+b)(b+c)(a+c) \\ a^3+b^3+c^3 \geqslant (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(a+c) \end{cases},$$

то $9(a^3+b^3+c^3) \geqslant (a+b+c)^3$ — истина, что и требовалось доказать.

4. $\dfrac{a+b}{1+a+b} \leqslant \dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1};\;\; a,b \geqslant 0.$

Так как $\begin{cases} 1+a+b \geqslant 1+a \\ 1+a+b \geqslant 1+b \end{cases}$, то $\begin{cases} \dfrac{a}{1+a+b} \leqslant \dfrac{a}{1+a} \\ \dfrac{b}{1+a+b} \leqslant \dfrac{b}{1+b} \end{cases}$.

По свойству 5, почленно сложив, получим:

$$\frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b},$$

т. е. $\dfrac{a+b}{1+a+b} \leqslant \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$ — истина,

что и требовалось доказать.

5. В каких пределах изменяется дробь $\dfrac{ab}{ab-a^2}$,

если $\begin{cases} 1{,}2 < a < 2{,}1 \\ 1{,}7 < b < 1{,}9 \end{cases}$?

а) 1. Так как $\begin{cases} 1{,}2 < a < 2{,}1 \\ 1{,}7 < b < 1{,}9 \end{cases}$,

то по свойству 6 $1{,}2 \cdot 1{,}7 < ab < 2{,}1 \cdot 1{,}9$,

т. е. $\underline{2{,}04 < ab < 3{,}99}$.

2. Так как $1{,}44 < a^2 < 4{,}41$, то $-4{,}41 < -a^2 < -1{,}44$.

3. Так как $\begin{cases} 2{,}04 < ab < 3{,}99 \\ -4{,}41 < -a^2 < -1{,}44 \end{cases}$,

то $-2{,}37 < ab - a^2 < 2{,}55$.

б) Разобьем промежуток $(-2{,}37; 2{,}55)$ на два: $(-2{,}37; 0) \cup \cup (0; 2{,}55)$, при $ab - a^2 = 0$ дробь не определена.

1. Пусть $0 < ab - a^2 < 2{,}55$,

тогда $\dfrac{1}{ab-a^2} > \dfrac{1}{2{,}55} = \dfrac{100}{255} = \dfrac{20}{51}$.

2. Так как $\begin{cases} 2{,}04 < ab < 3{,}99 \\ \dfrac{20}{51} < \dfrac{1}{ab-a^2} \end{cases}$,

то $\dfrac{ab}{ab-a^2} > \dfrac{204}{100} \cdot \dfrac{20}{51} = \dfrac{4}{5}$, т. е. $\underline{\dfrac{ab}{ab-a^2} > \dfrac{4}{5}}$.

в) 1. Пусть $-2{,}37 < ab - a^2 < 0$, значит $2{,}37 > -(ab-a^2) > 0$,

тогда $\dfrac{1}{-(ab-a^2)} > \dfrac{1}{2{,}37} = \dfrac{100}{237}$.

2. Так как $\begin{cases} 2{,}04 < ab < 3{,}99 \\ \dfrac{100}{237} < \dfrac{1}{-(ab-a^2)} \end{cases}$, то по свойству 6

$\dfrac{ab}{-(ab-a^2)} > \dfrac{204}{100} \cdot \dfrac{100}{237} = \dfrac{204}{237} = \dfrac{68}{79}$,

следовательно, $\underline{\dfrac{ab}{ab-a^2} \leqslant -\dfrac{68}{79}}$.

$\boxed{\dfrac{ab}{ab-a^2} < -\dfrac{68}{79} \quad \text{или} \quad \dfrac{ab}{ab-a^2} > \dfrac{4}{5}}$.

2

Математическая индукция

Понятие математической индукции

Пусть $\varphi(n)$ — утверждение, зависящее от $n \in \mathbb{N}$.

Например: сумма кубов трех последовательных натуральных чисел кратна трем, т. е. $\left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right) \vdots\, 3$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Логический переход от верности ряда частных утверждений, т. е. от верности при конкретных значениях n к верности при любых натуральных значениях n называется индукцией.

Логический переход от общих рассуждений к частным называется дедукцией.

Примеры ложной индукции

1. Рассмотрим алгебраическое выражение $f(n) = n^2 + n + 41$ при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 39$.

   В этом случае значения $f(n)$ — простые числа (43, 47, 53, 61, 71,..., 1601), в чем можно убедиться непосредственным вычислением. Казалось бы, формула простого числа, наконец, найдена. Но Л. Эйлер (1601–1665) проверил следующее значение n, и оказалось, что $f(40) = 41^2$. Значит, утверждение в общем виде является ложным.

2. Рассмотрим выражение $f(n) = 2^{2^n} + 1$.

   Пьер Ферма (1707–1783), проведя непосредственные вычисления при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, считал, что результат всех вычислений есть простое число. Л. Эйлер позже опроверг это утверждение.

   Действительно, $f(5) = 2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417$, т. е. составное.

3. Рассмотрим выражение $f(n) = n^k - n$. При $k = 3, 5, 7$ данное выражение кратно k, т. е. $\left(n^k - n\right) \,\vdots\, k$.

   Так долгое время считал Лейбниц (1646–1716). Позднее, к своему сожалению, Лейбниц нашел, что $2^9 - 2 = 510 \not\vdots\, 9$.

4. Ранее было известно, что $\left(2^{p-1} - 1\right) \not\vdots\, p^2$ для любых простых чисел p, меньших 1000. Поэтому советский математик Д. А. Граве предположил, что это верно для любых простых чисел. Много позже, используя мощные вычислительные машины, было доказано, что $\left(2^{1092} - 1\right) \,\vdots\, 1093^2$, при этом 1093 — простое число.

5. Для выражения $f(n) = 991n^2 + 1$ ученые долгое время искали значение n, при котором $f(n)$ — квадрат конкретного натурального числа, и терпели неудачу. Однако утверждение, что таких n не существует, оказалось ложным. Лишь недавно выяснлось, что при $n = 120\,557\,357\,903\,313\,594\,474\,425\,538\,767$ $991n^2 + 1$ есть полный квадрат.

Данные примеры убедительно показывают, что утверждение может быть верным в целом ряде случаев, но в то же время неверным *вообще*. Возникает вопрос: если утверждение верно в ряде частных случаев, как же узнать, верно ли утверждение в общем случае, ведь все случаи проверить невозможно?

Этот вопрос иногда можно решить, используя *теорему — принцип математической индукции.*

Теорема. Утверждение $\varphi(n)$ верно при любых натуральных числах, если выполняются два условия:

1. $\varphi(n)$ верно при $n = 1$ ($\varphi(1)$ — И).
2. Из верности утверждения при $n = k$ следует его верность при $n = k+1$, т. е. из ($\varphi(k)$ — И) следует ($\varphi(k+1)$ — И).

Доказательство

Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что из выполнения условий теоремы следует, что утверждение верно не для любого натурального числа.

Тогда существует $n = m$, для которого $\varphi(m)$ — ложно.

Для любого n, меньшего m, утверждение истинно, т. е. m — первое число, для которого утверждение ложно.

Очевидно, что $m > 1$, так как по условию при $n = 1$ утверждение $\varphi(1)$ — истинно.

Итак, для числа $m-1$ $\varphi(m-1)$ — истинно, а для следующего за ним числа m $\varphi(m)$ — ложно. Но это противоречит второму условию, т. е. верности индуктивного перехода в теореме.

Пришли к противоречию, которое доказывает: предположение о том, что из истинности условий теоремы следует, что существует число $m \in \mathbb{N}$, для которого утверждение $\varphi(m)$ ложно, — является неверным.

Значит, из истинности условий теоремы следует, что $\varphi(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Пример 1. $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Вначале попытаемся выдвинуть какую-нибудь гипотезу, а затем доказать ее верность.

Так как $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n$,
то вычислим:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2; \quad S_3 = S_2 + a_3;$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = S_1 + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{3+1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

и далее по аналогии

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = S_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{8+1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Похоже, что $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Для того чтобы проверить гипотезу, необходимо убедиться в выполнении обоих условий теоремы.

Примечание

Первое условие, при котором $\varphi(1)$ — истина, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$, называется *базой индукции*. Условие $(\varphi(k) - \text{И})$ называется *индуктивным предположением*. Переход от $(\varphi(k) - \text{И})$ к $(\varphi(k+1) - \text{И})$ называется *индуктивным переходом*.

а) Пусть $n = 1$, тогда левая часть $\mathrm{L} = S_1 = a_1 == \dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$;

правая часть $\Pi = S_n = \dfrac{n}{n+1}$; при $n = 1$ $S_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, $\mathrm{L} = \Pi$, значит $(\varphi(1) - \text{И})$.

б) Пусть по индуктивному предположению $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = \dfrac{k}{k+1}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)},$$

а $S_{k+1} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{k\cdot(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$,

т. е. $S_{k+1} = S_k + \dfrac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$.

Но $S_k = \dfrac{k}{k+1}$ по индуктивному предположению, значит

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Мы доказали, что $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$, следовательно,

из $(\varphi(k)$ — И) следует, что $(\varphi(k+1)$ — И), т. е. доказали верность индуктивного перехода.

Итак, доказаны оба условия теоремы:

1. $(\varphi(1)$ — И) — база индукции;
2. Из $(\varphi(k)$ — И) следует $(\varphi(k+1)$ — И) — индуктивный переход.

Следовательно, по теореме $(\varphi(n)$ — И) при любых $n \in \mathbb{N}$, т. е. $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Докажите тождество:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

а) Пусть $n = 1$.

$$\mathrm{L} = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)};$$

$$\Pi = \frac{1}{x-1} + \frac{2^2}{1-x^{2^2}} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(1-x^2)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{-(1+x)(1+x^2)+4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{-x^3-x^2-x+3}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{(1-x)(x^2+2x+3)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)}.$$

В данном преобразовании использовано деление многочлена на одночлен:

$$
\begin{array}{r|l}
{}_{-}\begin{array}{r}
-x^3 - \quad x^2 - \quad x + 3 \\
-x^3 + \quad x^2 \qquad\qquad
\end{array} & -x+1 \\
\cline{2-2}
\hline
{}_{-}\begin{array}{r}
-2x^2 - \quad x \\
-2x^2 + \quad 2x
\end{array} & x^2+2x+3 \\
\hline
{}_{-}\begin{array}{r}
-3x+3 \\
-3x+3
\end{array} & \\
\hline
\end{array}
$$

Итак, $\mathrm{L} = \Pi$, значит $(\varphi(1) - \text{И})$.

б) Пусть по индуктивному предположению $(\varphi(k) - \text{И})$,

т. е. $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \ldots + \dfrac{2^k}{1+x^{2^k}} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е.

$$\frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \underline{\frac{1}{1-x} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}}.$$

$$\frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}\cdot\left(1+x^{2^{k+1}}\right) + 2^{k+1}\cdot\left(1-x^{2^{k+1}}\right)}{\left(1-x^{2^{k+1}}\right)\left(1+x^{2^{k+1}}\right)} =$$

$$= \underline{\frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}}$$ — индуктивный переход верен

(так как $x^{2^{k+1}} \cdot x^{2^{k+1}} = x^{2^{k+1}+2^{k+1}} = x^{2^{k+2}}$).

Итак, мы доказали, что оба условия теоремы выполняются:

1. ($\varphi(1)$ — И) — база индукции;
2. Из ($\varphi(k)$ — И) следует ($\varphi(k+1)$ — И) — индуктивный переход.

Следовательно, ($\varphi(n)$ — И) для любого $n \in \mathbb{N}$,
т. е. $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \ldots + \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

Пример 3. Докажем, что $\left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right) \vdots 3$.

а) Пусть $n = 1$. Тогда
$\left(1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3\right) = 1+8+9 = 18 \vdots 3$, т. е. ($\varphi(1)$ — И).

б) Пусть ($\varphi(k)$ — И), т. е. $\left(k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right) \vdots 3$.
Докажем, что тогда ($\varphi(k+1)$ — И),
т. е. $\left((k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3\right) \vdots 3$.

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$$
$$= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 =$$
$$= \underbrace{k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3}_{\vdots\, 3} + \underbrace{9}_{\vdots\, 3} \cdot \left(k^2 + 3k + 3\right).$$

$\left(k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\right) \vdots 3$ и $9 \cdot \left(k^2 + 3k + 3\right) \vdots 3$,
значит $\left((k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3\right) \vdots 3$.

Итак, было доказано, что

1. ($\varphi(1)$ — И) — база индукции;
2. Из ($\varphi(k)$ — И) следует ($\varphi(k+1)$ — И) — индуктивный переход.

Тогда ($\varphi(n)$ — И) для любого $n \in \mathbb{N}$,
т. е. $\left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right) \vdots 3$, что и требовалось доказать.

Примечание

Известно, что еще древнегреческий философ Аристотель (384–322 гг. до н. э.), мечтая объяснить все происходящее в мире, очень важным считал выяснение того, *что является верной аргументацией истинности того или иного рассуждения.* Все конкретное, частное, что воспринимается нашими органами чувств, есть отправная точка, позволяющая сформулировать общий вывод. Иначе говоря, процесс *познания* по Аристотелю должен являться переходом от частного к общему.

Особо отметим также, что Аристотель предполагал необходимым использовать как *основной* метод дедукцию и логические переходы к частным утверждениям.

К сожалению, в варианте Аристотеля дедукция отбрасывала любые альтернативные мнения, что монополизировало мир знаний, превращая его в своеобразное религиозное познание как символ веры.

Много позже Фрэнсис Бэкон (1561–1626), Рене Декарт (1596–1650) и Галилео Галилей (1564–1642) показали несовершенство, противоречивость и известную несостоятельность взглядов Аристотеля на процесс познания.

Практикум 5

1. Докажите:

а) $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$;

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

в) $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$;

г) $\left(2n^3-3n^2+n\right) \,\vdots\, 6$;

д) $(4^n+5) \,\vdots\, 3$.

2. Найдите формулу суммы и докажите ее:

а) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots$;

б) $S_n=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$;

в) $S_n=1+5+13+25+\ldots$ (разность двух соседних чисел образует арифметическую прогрессию);

г) $S_n=1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)\cdot x^{n-2}+n\cdot x^{n-1}$;

д) $S_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}+\dfrac{33}{8}+\ldots+\dfrac{2^{2n-1}+1}{2^n}$.

Решение практикума 5

1. Докажите:

а) $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

Пусть $n=1$, тогда $\mathrm{L}=1$; $\Pi=1^2=1$, значит $\mathrm{L}=\Pi$, т. е. ($\varphi(1)$ — И).

Пусть ($\varphi(k)$ — И) — индуктивное предположение,

т. е. $1+3+5+\ldots+2k-1=k^2$.

Докажем, что ($\varphi(k+1)$ — И),

т. е. $1+3+5+\ldots+2k-1+2k+1=(k+1)^2$.

Так как $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$, то $S_{k+1}=k^2+2k+1=(k+1)^2$, значит ($\varphi(k+1)$ — И).

Итак,

1. ($\varphi(1)$ — И) — база индукции;
2. Из ($\varphi(k)$ — И) следует, что ($\varphi(k+1)$ — И) — индуктивный переход.

Значит, для любого $n\in\mathbb{N}$ ($\varphi(n)$ — И),

т. е. $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

б) $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Пусть $n=1$, тогда

$\mathrm{L}=1\cdot2=2$; $\quad \Pi=\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}=2$, значит $\mathrm{L}=\Pi$.

Пусть ($\varphi(k)$ — И),

т. е. $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+k(k+1)=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Докажем, что тогда ($\varphi(k+1)$ — И),

т. е. $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

Так как $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$, то

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(1) - И)$ — база индукции;
2. Из $(\varphi(k) - И)$ следует, что $(\varphi(k+1) - И)$ — индуктивный переход.

Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad (\varphi(n) - И)$,

т. е. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

что и требовалось доказать.

в) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = 1$; $\Pi = 2^1 - 1 = 1$, значит $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - И)$.

Пусть $(\varphi(k) - И)$, т. е. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - И)$,

т. е. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

Так как $S_{k+1} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = S_k + 2^k =$ $= 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$, то $(\varphi(k+1) - И)$.

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(1) - И)$;
2. Из $(\varphi(k) - И)$ следует, что $(\varphi(k+1) - И)$.

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad (\varphi(n) - И)$,

т. е. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, что и требовалось доказать.

г) $\left(2n^3 - 3n^2 + n\right) \vdots 6$.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 1 = 0 \vdots 6$, а значит, $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $\left(2k^3 - 3k^2 + k\right) \vdots 6$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $\left(2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1)\right) \vdots 6$.

$$2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1) =$$
$$= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 =$$
$$= 2k^3 + 3k^2 + k = \underbrace{\left(2k^3 - 3k^2 + k\right)}_{\vdots\, 6} + \underbrace{6k^2}_{\vdots\, 6}.$$

Следовательно, $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $\left(2n^3 - 3n^2 + n\right) \vdots 6$, что и требовалось доказать.

д) $(4^n + 5) \vdots 3$.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = 4^1 + 5 = 9 \vdots 3$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $\left(4^k + 5\right) \vdots 3$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$, т. е. $\left(4^{k+1} + 5\right) \vdots 3$.

$$4^{k+1} + 5 = 4\cdot 4^k + 5 = (3+1)\cdot 4^k + 5 = \underbrace{4^k + 5}_{\vdots\, 3} + \underbrace{3\cdot 4^k}_{\vdots\, 3}.$$

Следовательно, $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $(4^n + 5) \vdots 3$, что и требовалось доказать.

2. Найдите формулу суммы и докажите ее:

а) $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \ldots.$

Очевидно, что ряд $1, 4, 7, 10, \ldots$ есть арифметическая прогрессия, где $a_1 = 1$, $d = 3$, и $a_n = 1 + (n-1)3$, т. е. $a_n = 3n - 2$, $a_{n+1} = 3n + 1$.

Тогда n-й член исходного ряда равен $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

$$S_1 = \frac{1}{4};$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{7+1}{4\cdot 7} = \frac{2}{7};$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{20+1}{7\cdot 10} = \frac{3}{10};$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{10\cdot 13} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10\cdot 13} = \frac{39+1}{10\cdot 13} = \frac{4}{13}.$$

Очевидно, что числитель есть n — номер слагаемого, а знаменатель — $4, 7, 10, 13, \ldots$ — арифметическая прогрессия.

Предположим, что $S_n = \dfrac{n}{3n+1}$ и докажем верность этой гипотезы.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = \dfrac{1}{1\cdot 4} = \dfrac{1}{4}$; $\Pi = \dfrac{1}{3\cdot 1 + 1} = \dfrac{1}{4}$, значит $\mathrm{L} = \Pi$, и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = \dfrac{k}{3k+1}$.

Докажем, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{3k+4}$.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} =$$

$$= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4},$$

значит $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, доказано, что

1. ($\varphi(1)$ — И);
2. Из ($\varphi(k)$ — И) следует, что ($\varphi(k+1)$ — И).

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ ($\varphi(n)$ — И),

т. е. $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots = \dfrac{n}{3n+1}$, что и требовалось доказать.

б) $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Решение этой задачи неочевидно. Один из способов, к которому бывает полезно обращаться в таких случаях, таков: вводят в рассмотрение другую задачу, сходную с данной, но более доступную, и пытаются найти какую-то взаимосвязь между данной задачей и введенной сходной с ней.

Положим $\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Известно, что $\sigma_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (формула суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ при $a_1 = 1$ и $d = 1$).

Чтобы понять связь между S_n и σ_n, составим экспериментальную вычислительную таблицу.

$S_1 = 1^2 = 1;$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5;$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14;$

$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 14 + 16 = 30;$

$S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 30 + 5^2 = 55;$

$S_6 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 55 + 36 = 91.$

n	1	2	3	4	5	6
S_n	1	5	14	30	55	91
σ_n	1	3	6	10	15	21

Прямой связи пока еще не видно, но попробуем исследовать по этой таблице отношение $\dfrac{S_n}{\sigma_n}$:

$\dfrac{S_1}{\sigma_1}=\dfrac{1}{1}$; $\dfrac{S_2}{\sigma_2}=\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{S_3}{\sigma_3}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$; $\dfrac{S_4}{\sigma_4}=\dfrac{30}{10}=\dfrac{3}{1}=\dfrac{9}{3}$;

$\dfrac{S_5}{\sigma_5}=\dfrac{55}{15}=\dfrac{11}{3}$; $\dfrac{S_6}{\sigma_6}=\dfrac{91}{21}=\dfrac{13}{3}$ и т. д.

Теперь очевидно, что знаменатель всегда равен трем, а числитель — последовательные нечетные числа — 3, 5, 7, 9, 11, 13, …:

$\dfrac{S_n}{\sigma_n}=\dfrac{2n+1}{3}$. Тогда $S_n=\dfrac{2n+1}{3}\sigma_n$ ($2n+1$ — формула последовательных нечетных чисел, начиная с трех);

$$S_n=\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2};\quad S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Итак, мы сформулировали гипотезу. Докажем ее.

Пусть $n=1$.

$$\mathrm{L}=S_1=a_1=1^2=1;\quad \Pi=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}=1,$$

значит, $\mathrm{L}=\Pi$, т. е. ($\varphi(1)$ — И).

Пусть ($\varphi(k)$ — И), т. е. $S_k=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Докажем, что тогда ($\varphi(k+1)$ — И),

т. е. $S_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Действительно,

$$S_{k+1}=1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=S_k+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(1) - И)$;
2. Из $(\varphi(k) - И)$ следует, что $(\varphi(k+1) - И)$.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - И)$,

т. е. $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что данное тождество было известно еще Архимеду: он использовал его для поиска формулы площади параболического сегмента, и теперь оно носит его имя. Подробнее см. Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. М. — СПб., 2014. С. 130–132.

Можно было бы сформулировать утверждение-гипотезу, идя другим путем: используя известное тождество $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ в виде $\boxed{(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1}$.

Тогда для $n = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1\\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1\\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1\\
(n+1)^3 - n^3 &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Почленно складывая, имеем:

$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n$

(все остальные слагаемые в левой части взаимно уничтожатся). Отсюда $(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \dfrac{3n(n+1)}{2} + n$.

После преобразований $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$, что и требовалось показать. Не будем же святее Папы Римского и признаем вполне приемлемым и такой способ поиска гипотезы доказательством ее верности.

в) $S_n = 1+5+13+25+41+\ldots$ (разность двух соседних чисел образует арифметическую прогрессию, где $S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$).

Попытаемся вначале решить задачу в общем виде.

С учетом условий задачи, пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ таковы, что

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= d\\
a_3 - a_2 &= 2d\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_k - a_{k-1} &= (k-1)d.
\end{aligned}$$

Почленно сложив, получим: $a_k - a_1 = \dfrac{k(k-1)}{2}d$.

Остальные члены такой прогрессии при сложении в левой части взаимно уничтожатся.

Учтем, что $1+2+3+\ldots+k-1 = \dfrac{k\cdot(k-1)}{2}$.

Полагая $k = 1, 2, \ldots, n$, найдем:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1\\
a_2 &= a_1 + \frac{1\cdot 2}{2}d\\
a_3 &= a_1 + \frac{2\cdot 3}{2}d\\
a_4 &= a_1 + \frac{3\cdot 4}{2}d\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1} &= a_1 + \frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2}d\\
a_n &= a_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}d.
\end{aligned}$$

Почленно складывая, получим:

$$S_n = na_1 + \left(\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)d =$$

$$= na_1 + \frac{1}{2}\left(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-1)n\right)d.$$

Отметим, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n =$
$= (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \ldots + (n^2 - n) =$
$= 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 - (2 + 3 + \ldots + n) =$
$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 - (1 + 2 + \ldots + n).$

Ранее было доказано, что

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, тогда

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Итак, в общем виде $\boxed{S_n = na_1 + \dfrac{n(n^2-1)}{6} \cdot d}$.

Примечание. Так как базовые тождества были доказаны ранее или будут доказаны позже (см. с. 137), то предложенное доказательство является вполне корректным.

В данной задаче $a_1 = 1,\ d = 4$, тогда

$S_n = n + \dfrac{n(n^2-1)}{6} \cdot 4;\quad \boxed{S_n = \dfrac{1}{3}n(2n^2+1)}$.

г) $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1) \cdot x^{n-2} + n \cdot x^{n-1}.$

Для поиска формулы суммы выделим *члены геометрической прогрессии*:

$$S_n = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) +$$
$$+ (x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + (n-1)x^{n-1}).$$

Напомним, что при $q \neq 1$

$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ —

формула суммы первых n членов геометрической прогрессии (см. с. 146).

Положим $x \neq 1$, $b_1 = 1$, $q = x$, тогда

$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$.

Следовательно,

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x} + x\left(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2}\right).$$

Так как $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} =$

$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} + \underline{nx^{n-1}} - \underline{nx^{n-1}} =$

$= S_n - nx^{n-1}$, то $S_n = \dfrac{1-x^n}{1-x} + x\left(S_n - nx^{n-1}\right)$;

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x} + xS_n - nx^n; \quad (1-x)S_n = \frac{1-x^n}{1-x} - x^n \cdot n;$$

$$S_n = \frac{(1-x^n) - x^n(1-x) \cdot n}{(1-x)^2}; \; S_n = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

При $x = 1$ $\quad S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$.

Ответ: при $x \neq 1$ $\quad S_n = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;

при $x = 1$ $\quad S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

д) $S_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{33}{8} + \ldots + \dfrac{2^{2n-1}+1}{2^n}$.

Для того чтобы сформулировать гипотезу о формуле суммы, вычислим значения S_1, S_2, S_3, $S_4 \ldots$

$a_n = \dfrac{2^{2n-1}+1}{2^n}$, значит

$S_1 = \dfrac{3}{2}$;

$S_2 = S_1 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{15}{4}$;

$S_3 = S_2 + \dfrac{33}{8} = \dfrac{15}{4} + \dfrac{33}{8} = \dfrac{63}{8}$;

$S_4 = S_3 + \dfrac{129}{16} = \dfrac{63}{8} + \dfrac{129}{16} = \dfrac{126+129}{16} = \dfrac{255}{16}$.

Вырисовывается некоторая закономерность:

$$S_1 = \frac{3}{2} = \frac{2^{2\cdot 1} - 1}{2^1};$$

$$S_2 = \frac{15}{4} = \frac{2^{2\cdot 2} - 1}{2^2};$$

$$S_3 = \frac{63}{8} = \frac{2^{2\cdot 3} - 1}{2^3};$$

$$S_4 = \frac{255}{16} = \frac{2^{2\cdot 4} - 1}{2^4}.$$

Гипотеза очевидна: $S_n = \dfrac{2^{2n} - 1}{2^n}$. Докажем ее, используя метод математической индукции.

Пусть $n = 1$. $\quad \mathrm{L} = \dfrac{3}{2}; \quad \Pi = \dfrac{2^{2\cdot 1} - 1}{2^1}$,

значит $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $S_k = \dfrac{2^{2k} - 1}{2^k}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$,

т. е. $S_{k+1} = \dfrac{2^{2(k+1)} - 1}{2^{k+1}}$.

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{2^{2k} - 1}{2^k} + \frac{2^{2k+1} + 1}{2^{k+1}} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(2^{2k} - 1\right) + 2^{2k+1} + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{2k+1}\cdot 2 - 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{2(k+1)} - 1}{2^{k+1}}.$$

Таким образом, $S_{k+1} = \dfrac{2^{2(k+1)} - 1}{2^{k+1}}$,

значит $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad (\varphi(n)$ — И$)$,

т. е. $\boxed{S_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{33}{8} + \ldots + \dfrac{2^{2n-1} + 1}{2^n} = \dfrac{2^{2n} - 1}{2^n}}$.

Применение индукции при доказательстве неравенств

1. *Неполная индукция*

Вначале рассмотрим пример *неполной* индукции. Докажем, что любое натуральное число равно следующему за ним.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $k = k + 1$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $k + 1 = k + 2$.

Действительно, если $(\varphi(k) - \text{И})$, и $k = k + 1$, то прибавив к обеим частям по 1, получим $k + 1 = k + 2$, что и требовалось доказать.

Вывод: все натуральные числа равны. Ошибка очевидна, но в чем она заключается?

Дело в том, что мы не проверили истинность $\varphi(1)$, т. е. базу индукции, а значит, попытались обобщить индуктивным переходом утверждение, в истинности которого для частных случаев предварительно не убедились.

Рассмотрим примеры доказательства неравенств методом математической индукции.

Пример 1. Докажем, что $2^{n+1} > 2n+1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство

Пусть $n=1$. Тогда $2^2 > 2+1$; $4 > 3$ — значит $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $2^{k+1} > 2k + 1$.

Докажем, что тогда и $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $2^{k+2} > 2k + 3$.

По индуктивному предположению $2^{k+1} > 2k + 1$.

Умножим обе части неравенства на 2:

$2 \cdot 2^{k+1} > 2(2k + 1) > (2k + 3) + (2k - 1)$.

Отметим, что если $a > b + c$, то $a > b$ при $c > 0$.

Следовательно, $2k - 1 > 0$. Тогда при $k > 1$ $\;2^{k+2} > 2k+3$.

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;

2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad(\varphi(n) - \text{И})$,
т. е. $2^{n+1} > 2n+1$.

2. Обобщающая теорема об индукции

Утверждение $\varphi(p)$ верно для любого $p \geqslant t$ $(p, t \in \mathbb{Z})$, если

а) $\varphi(t)$ — истинно;

б) из $(\varphi(p) - \text{И})$ следует $(\varphi(p+1) - \text{И})$, где $p > t$.

Доказательство можно провести аналогично предыдущему. Оно также опирается на свойство подмножеств множества целых чисел, ограниченных снизу, иметь минимальный элемент.

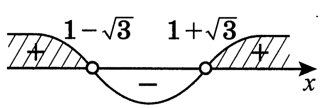
Пример 2. Докажите, что $2^n > 2n^2 - 2$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство

Пусть $n = 1$. $\quad 2^1 > 2 \cdot 1^2 - 2$; $\quad 2 > 0$, значит $(\varphi(1) - \text{И})$.
Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $2^k > 2k^2 - 2$.
Докажем, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $2^{k+1} > 2(k+1)^2 - 2$.
Так как $(\varphi(k) - \text{И})$, то $2^k > 2k^2 - 2$. Умножим обе части неравенства на 2:

$$2 \cdot 2^k > 2(2k^2 - 2) = 4k^2 - 4 = 2(k+1)^2 - 2 + 2k^2 - 4k - 4 >$$
$$> 2(k+1)^2 - 2.$$

Это рассуждение верно только при $2k^2 - 4k - 4 > 0$.



Таким образом, $(\varphi(k+1) - \text{И})$ только при $k > 2$, а значит, база индукции должна быть другой, и рассуждение придется начать сначала.

При $n=3$ $2^3>16$ — $\varphi(3)$ — ложно;
при $n=4$ $2^4>30$ — $\varphi(4)$ — ложно;
при $n=5$ $2^5>48$ — $\varphi(5)$ — ложно;
при $n=6$ $2^6>70$ — $\varphi(6)$ — ложно;
при $n=7$ $2^7>96$ — $\varphi(7)$ — истинно, это база индукции

Теперь пусть $(\varphi(k)$ — И$)$ $(2^k>2k^2-2)$ при $k\geqslant 7$.

Докажем, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$, т. е. $2^{k+1}>2(k+1)^2-2$.

Так как $2^k>2k^2-2$, умножим обе части неравенства на 2:

$2\cdot 2^k>2(2k^2-2)=\underline{2(k+1)^2-2}+\underline{\underline{2k^2-4k-4}}>$

$>2(k+1)^2-2$ (так как $2k^2-4k-4\geqslant 0$ на $[7;\infty)$, см. рис. на с. 132).

Следовательно,

1. $(\varphi(7)$ — И$)$;

2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$ при $k\geqslant 7$.

Таким образом, для любого $n\in\mathbb{N}$ $(n\geqslant 7)$ $(\varphi(n)$ — И$)$, т. е. $2^n>2n^2-2$ при $n\geqslant 7$, что и требовалось доказать.

3. Неравенство Бернулли

Приведем доказательство неравенства Бернулли.

$$(1+\alpha)^n>1+n\alpha,\ \text{где}\ \begin{cases}\alpha>-1\\ \alpha\neq 0\\ n>1,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

Пусть $n=2$.

$(1+\alpha)^2>1+2\alpha$; $\quad\alpha^2>0$, значит $(\varphi(2)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $(1+\alpha)^k>1+k\alpha$.

Докажем, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$, т. е. $(1+\alpha)^{k+1}>1+(k+1)\alpha$.

По индукционному предположению $(1+\alpha)^k>1+k\alpha$.

Умножим обе части неравенства на $1+\alpha$, тогда $(1+\alpha)^{k+1} > (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2 > 1+(k+1)\alpha$, так как $k\alpha^2 > 0$.

Значит, $(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha$, т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, доказано, что

1. $(\varphi(2) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ при $\alpha > -1$ и $\alpha \neq 0$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, где $\begin{cases} \alpha > -1 \\ \alpha \neq 0 \\ n > 1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Упражнения 1

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия, где d — разность прогрессии. Докажите методом математической индукции:

а) $a_n = a_1 + (n-1)d$ — формула n-го члена арифметической прогрессии.

б) $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$ — суммы любых двух членов арифметической прогрессии равны между собой, если слагаемые этих сумм равно отстоят от начала и конца последовательных членов арифметической прогресии.

в) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.

г) $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$

д) $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$ — характеристическое *свойство*, *признак* арифметической прогрессии.

е) $S_n = an^2 + bn + c.$

2. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — геометрическая прогрессия, q — знаменатель геометрической прогрессии ($q \neq 0$). Докажите методом математической индукции:

а) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — формула n-го члена геометрической прогрессии.

б) $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$ — формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.

в) $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ — формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.

г) $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$ — характеристическое *свойство*, *признак* геометрической прогрессии.

3. а) Если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

б) $2^{n-1} \cdot (a^n + b^n) \geqslant (a + b)^n$, где $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение упражнений 1

1. Напомним определение арифметической прогрессии

(см. Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. М. — СПб., 2014. С 133–187):

Арифметической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентным отношением $a_{n+1} = a_n + d$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ — члены последовательности; d — разность прогрессии, равная разности последующего (a_{n+1}) и предыдущего (a_n) члена последовательности.

а) Докажем методом математической индукции верность формулы n-го члена арифметической прогрессии, т. е. $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = a_1$, $\Pi = a_1 + (1-1)d = a_1$, значит $\mathrm{L} = \Pi$, следовательно, $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $a_k = a_1 + (k-1)d$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$, т. е. $a_{k+1} = a_1 + kd$.

По определению арифметической прогрессии

$a_{k+1} = a_k + d$, но по индуктивному предположению $a_k = a_1 + (k-1)d$, тогда $a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d$, т. е. $a_{k+1} = a_1 + kd$, значит $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n)$ — И$)$,

т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ $a_n = a_1 + (n-1)d$,

что и требовалось доказать.

б) Докажем, что суммы любых двух членов арифметической прогрессии равны между собой, если слагаемые этих сумм равно отстоят от начала и конца последовательных членов арифметической прогресии, т. е. для $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = a_n + a_1.$

Отметим, что условие можно сформулировать иначе: если суммы индексов двух членов арифметической прогрессии равны сумме индексов другой пары членов этой прогрессии, то суммы этих пар членов арифметической прогрессии равны.

Докажем, что для любых $k, n \in \mathbb{N}$, где $k \leqslant n$, $a_1 + a_n = {}$ $= a_k + a_{n-k+1}$. Доказательство проведем по n.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = a_1 + a_1 = 2a_1$.

$\Pi = a_k + a_{1-k+1} = a_k + a_{2-k} =$
$= a_1 + (k-1)d + a_1 + (2-k-1)d = 2a_1 + (k-1+1-k)d =$
$= 2a_1 + 0 \cdot d = 2a_1$,

значит $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(p) - \text{И})$, где $p \geqslant k$, т. е. $a_1 + a_p = a_k + a_{p-k+1}$.

Докажем, что $(\varphi(p+1) - \text{И})$,

т. е. $a_1 + a_{p+1} = a_k + a_{p+1-k+1}$.

Так как $(\varphi(p) - \text{И})$, то $a_1 + a_p = a_k + a_{p-k+1}$.

Прибавим к обеим частям равенства d, тогда

$\underline{a_1 + a_p + d} = \underline{\underline{a_k + a_{p-k+1} + d}}.$

Так как $\underline{a_1 + a_p + d} = 2a_1 + (p-1)d + d = 2a_1 + pd$, а

$a_k + a_{p-k+1} + d = a_1 + (k-1)d + a_1 + (p-k)d + d =$
$= 2a_1 + (k-1+p-k+1)d = 2a_1 + pd$,

где $\underline{a_1 + a_p + d} = a_1 + a_{p+1}$,

а $\underline{\underline{a_k + a_{p-k+1} + d}} = a_k + a_{p+1-k+1}$,

то $a_1 + a_{p+1} = a_k + a_{p+1-k+1}$, т. е. $(\varphi(p+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(p) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(p+1) -$ И$)$ $(p \geqslant k)$.

Таким образом, для любых $n, p \in \mathbb{N}$ $(n > p)$

$(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. для любых $n, k \in \mathbb{N}$, где $n > k$,

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = \ldots = a_n + a_1$,

что и требовалось доказать.

в) Докажем, что $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = S_1 = a_1$; $\quad \Pi = \dfrac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 = a_1$.

Тогда $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $S_k = \dfrac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $S_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_{k+1}}{2} \cdot (k+1)$.

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k + a_{k+1} =$$

$$= \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k + a_1 + kd = \frac{a_1 k + a_k k + 2a_1 + 2kd}{2} =$$

$$= \frac{(a_1 k + a_1) + (a_k k + kd) + (a_1 + kd)}{2} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot (k+1) + (a_k + d) \cdot k + (a_1 + kd)}{2} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot (k+1) + a_{k+1} \cdot k + a_{k+1}}{2} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot (k+1) + a_{k+1} \cdot (k+1)}{2} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} \cdot (k+1).$$

Значит, $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, что и требовалось доказать.

г) Докажем, что $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ для любых $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = S_1 = a_1$; $\Pi = \dfrac{2a_1 + (1-1) \cdot d}{2} = a_1$,

значит $\mathrm{L} = \Pi$ и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = \dfrac{2a_1 + (k-1)d}{2} \cdot k$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $S_{k+1} = \dfrac{2a_1 + kd}{2} \cdot (k+1)$.

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{2a_1 + (k-1)d}{2} \cdot k + (a_1 + kd) =$$

$$= \frac{2a_1 k + k(k-1)d + 2a_1 + 2kd}{2} =$$

$$= \frac{2a_1(k+1) + kd(k-1+2)}{2} =$$

$$= \frac{2a_1(k+1) + kd(k+1)}{2} = \frac{2a_1 + kd}{2} \cdot (k+1).$$

Следовательно, $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, что и требовалось доказать.

д) Докажем верность характеристического признака — свойства арифметической прогрессии. Если для любого $n \in \mathbb{N}$ некоторой числовой последовательности верно, что $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$, то такая последовательность является арифметической прогрессией. Иначе говоря, если любой член последовательности, начиная со второго, есть среднее арифметическое рядом стоящих, то такая последовательность является арифметической прогрессией. (Кстати, именно вследствие этого признака такая последовательность получила название арифметической прогрессии.)

Можно доказать и обратное: для любой арифметической прогрессии выполняется $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Признак. Пусть при любых $n \in \mathbb{N}$ для последовательности верно, что начиная со второго члена $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Тогда $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$. Следовательно, после преобразования $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, т. е. разность между любыми рядом стоящими членами есть величина постоянная, скажем, равная d.

Значит, $a_{n+1} - a_n = d$, т. е. $a_{n+1} = a_n + d$, что является рекуррентным определением арифметической прогрессии.

Свойство. Для любых членов арифметической прогрессии, начиная со второго, верно $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Докажем верность этого утверждения методом математической индукции.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = a_{1+1} = a_2$ $(a_2 = a_1 + d)$;

$\Pi = \dfrac{a_1 + a_3}{2} = \dfrac{a_1 + a_1 + 2d}{2} = a_1 + d = a_2$ $(a_3 = a_1 + 2d)$.

Следовательно, $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $a_{k+1} = \dfrac{a_k + a_{k+2}}{2}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $a_{k+2} = \dfrac{a_{k+1} + a_{k+3}}{2}$.

Так как $(\varphi(k) -$ И$)$, то $a_{k+1} = \dfrac{a_k + a_{k+2}}{2}$.

Прибавим к обеим частям равенства d, получим:

$$a_{k+1} + d = \frac{a_k + a_{k+2}}{2} + d,$$

т. е. $\mathrm{L} = a_{k+1} + d = a_{k+2}$ (по определению),

$$\Pi = \frac{a_k + a_{k+2}}{2} + d = \frac{a_k + a_{k+2} + 2d}{2} =$$

$$= \frac{(a_k + d) + (a_{k+2} + d)}{2} = \frac{a_{k+1} + a_{k+3}}{2}.$$

Так как $\mathrm{L} = \Pi$, то $a_{k+2} = \dfrac{a_{k+1} + a_{k+3}}{2}$,

т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать и *признак* арифметической прогрессии.

е) Для того чтобы последовательность являлась арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы сумма первых n членов этой последовательности была функцией не выше второй степени: $S_n = an^2 + bn + c$.

Напомним, что:

1. **Если из (A — И) следует (B — И), то говорят, что истинность утверждения B есть необходимое условие истинности утверждения A, или что (B — И) есть свойство истинности утверждения A, а (A — И) есть признак истинности утверждения B;**
2. **Если из (B — И) следует (A — И), то B — признак истинности A, а A — свойство истинности B;**
3. **Если из истинности A следует истинность B и из истинности B следует истинность A, то пишут (A — И) $\Leftrightarrow$ (B — И) и говорят, что для того, чтобы ($\varphi(A)$ — И), необходимо и достаточно, чтобы (B — И).**

Признак. Докажем, что если сумма первых n членов последовательности есть функция не выше второй степени, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.

Рассмотрим S_n.

$S_n = an^2 + bn + c$ — дано по условию, тогда

$S_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c; \quad S_n = an^2 + bn + c.$

Очевидно, что $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$:

$a_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) =$

$= 2an + a + b = S_{n+1} - S_n.$

Далее $a_n = S_n - S_{n-1}$, тогда

$a_n = an^2 + bn + c - \big(a(n-1)^2 + b(n-1) + c\big) =$

$= 2an - a + b = S_n - S_{n-1}.$

Рассмотрим разность двух последовательных членов последовательности:

$a_{n+1} - a_n = 2an + a + b - (2an - a + b) = 2a,$

т. е. $a_{n+1} - a_n = 2a.$

Это значит, что разность между любыми рядом стоящими членами последовательности есть величина постоянная, равная $2a$. Но это есть рекуррентное определение арифметической прогрессии, где разность прогрессии $d = 2a$.

Примечание. При $a \neq 0$ $S_n = an^2 + bn + c$ — функция второй степени, при $a = 0$ и $b \neq 0$ — функция первой степени, при $a = 0$ и $b = 0$ — функция нулевой степени (константа).

Свойство. Докажем методом математической индукции, что для арифметической прогрессии сумма первых n членов есть функция не выше второй степени, т. е. $S_n = an^2 + bn + c$.

Пусть $n = 1$, тогда

$\mathrm{L} = S_1 = a_1;$ $\quad \Pi = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c,$

следовательно, $a_1 = a + b + c$ — число постоянное, т. е. правая часть — фунция не выше второй степени, и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = ak^2 + bk + c$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $S_{k+1} = a(k+1)^2 + b(k+1) + c$.

Пусть $S_{k+1} = \underline{a_0k^2 + b_0k + c_0}$.

С другой стороны, $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} =$

$= ak^2 + bk + c + a_1 + kd = \underline{ak^2 + (b+d)k + c + a_1}$,

т. е. при $a_0 = a$, $b_0 = b + d$, $c_0 = c + a_1$ S_{k+1} — функция не выше второй степени, тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $S_n = an^2 + bn + c$ функция не выше второй степени, что и требовалось доказать.

Примечание. Так как ранее было доказано, что сумма первых n членов арифметической прогрессии равна

$S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$, то $S_n = a_1 n + \frac{d}{2}n^2 - \frac{1}{2}dn$,

т. е. $S_n = \frac{1}{2}dn^2 + \left(a_1 - \frac{1}{2}d\right)n$,

где $a = \frac{1}{2}d,\ \ b = a_1 - \frac{1}{2}d,\ \ c = 0.$

Значит $S_n = an^2 + bn + c$ — функция не выше второй степени, причем:

при $\frac{1}{2}d \neq 0$ S_n — функция второй степени;

при $\frac{1}{2}d = 0$ и $a_1 - \frac{1}{2}d \neq 0$ S_n — функция первой степени;

при $\frac{1}{2}d = 0$ и $a_1 - \frac{1}{2}d = 0$ S_n — функция нулевой степени,

т. е. $S_n = \mathrm{const} = 0$, что и требовалось доказать.

2. Напомним определение геометрической прогрессии.

> **Геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентным отношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Здесь $b_1, b_2, \ldots, b_n$ называются членами геометрической прогрессии, q — знаменателем геометрической прогрессии ($q \neq 0$).**

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — геометрическая прогрессия, q — знаменатель геометрической прогрессии ($q \neq 0$). Докажем методом математической индукции:

а) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — формула n-го члена геометрической прогрессии.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = b_1$; $\Pi = b_1 \cdot q^{1-1} = b_1 \cdot q^0 = b_1$.

Тогда $\mathrm{L} = \Pi$, и ($\varphi(1)$ — И).

Пусть ($\varphi(k)$ — И), т. е. $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.

Докажем, что ($\varphi(k+1)$ — И), т. е. $b_{k+1} = b_1 \cdot q^k$.

Так как $(\varphi(k) - \text{И})$, то $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.

Умножим обе части равенства на q $(q \neq 0)$:

$b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q$, т. е. $b_k \cdot q = b_1 \cdot q^k$.

Отметим, что по определению $b_k \cdot q = b_{k+1}$, тогда $b_{k+1} = b_1 \cdot q^k$, т. е. $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$, т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, что и требовалось доказать.

б) $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$ — формула суммы первых n членов геометрической прогрессии $(q \neq 1)$.

Пусть $n = 1$, тогда

$$\mathrm{L} = S_1 = b_1; \quad \Pi = \frac{b_1 \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q-1)}{q-1} = b_1.$$

Значит, $\mathrm{L} = \Pi$, и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = \dfrac{b_k \cdot q - b_1}{q-1}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $S_{k+1} = \dfrac{b_{k+1} \cdot q - b_1}{q-1}$.

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = \frac{b_k \cdot q - b_1}{q-1} + b_{k+1} =$$

$$= \frac{b_k \cdot q - b_1 + b_k \cdot q \cdot (q-1)}{q-1} =$$

$$= \frac{b_{k+1} - b_1 + b_{k+1} \cdot q - b_{k+1}}{q-1} = \frac{b_{k+1} \cdot q - b_1}{q-1},$$

т. е. $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. ($\varphi(1)$ — И);
2. Из ($\varphi(k)$ — И) следует, что ($\varphi(k+1)$ — И).

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ ($\varphi(n)$ — И),

т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ ($q \neq 1$),

что и требовалось доказать.

в) Докажем другую формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии.

$S_n = \dfrac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ — формула суммы первых n членов геометрической прогрессии (при $q \neq 1$).

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = S_1 = b_1$; $\Pi = \dfrac{b_1(q-1)}{q-1} = b_1$,

т. е. $\mathrm{L} = \Pi$, и ($\varphi(1)$ — И).

Пусть ($\varphi(k)$ — И), т. е. $S_k = \dfrac{b_1\left(q^k - 1\right)}{q-1}$.

Докажем, что тогда ($\varphi(k+1)$ — И),

т. е. $S_{k+1} = \dfrac{b_1\left(q^{k+1} - 1\right)}{q-1}$.

Так как ($\varphi(k)$ — И), то $S_k = \dfrac{b_1\left(q^k - 1\right)}{q-1}$.

Прибавим к обеим частям b_{k+1}:

$S_k + b_{k+1} = \dfrac{b_1\left(q^k - 1\right)}{q-1} + b_{k+1}$, тогда

$$S_{k+1} = \frac{b_1 q^k - b_1 + b_{k+1}(q-1)}{q-1} =$$

$$= \frac{b_{k+1} + b_{k+1}q - b_1 - b_{k+1}}{q-1} = \frac{b_{k+1}q - b_1}{q-1} =$$

$$= \frac{b_1 \cdot q^k \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1\left(q^{k+1} - 1\right)}{q-1},$$ т. е. ($\varphi(k+1)$ — И).

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(q \neq 1)$ $(\varphi(n) - \text{И})$, т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ и $q \neq 1$ $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, что и требовалось доказать.

г) $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$ — характеристическое свойство, признак геометрической прогрессии.

Признак. Пусть для последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_n$ для любых $n \in \mathbb{N}$, начиная со второго члена, выполняется равенство $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$. Докажем, что тогда данная последовательность является геометрической прогрессией.

Из $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$ следует, что $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}}$ есть величина постоянная, скажем, равная q, т. е. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_{n+2} = b_{n+1} \cdot q$ и так далее.

Таким образом, мы получили *определение* рекуррентного отношения геометрической прогрессии.

Свойство. Для любых членов геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n$, начиная со второго, выполняется равенство $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$.

Докажем это свойство методом математической индукции.

Пусть $n = 1$, тогда $\text{L} = b_{1+1}^2 = b_2^2$;

$\Pi = b_1 \cdot b_{1+2} = b_1 \cdot b_3 = b_1 \cdot b_1 \cdot q^2 = (b_1 \cdot q)^2 = b_2^2$.

Значит, $\text{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $b_{k+1}^2 = b_k \cdot b_{k+2}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $b_{k+2}^2 = b_{k+1} \cdot b_{k+3}$.

Рассмотрим $b_{k+2}^2 = b_{k+1} \cdot b_{k+3}$.

Так как $b_{k+2} = b_{k+1} \cdot q$, то $b_{k+2}^2 = b_{k+1}^2 \cdot q^2$.

С другой стороны, $b_{k+1} = b_k \cdot q$ и $b_{k+3} = b_{k+2} \cdot q$,

тогда $b_{k+1} \cdot b_{k+3} = b_k \cdot b_{k+2} \cdot q^2$.

Значит, $b_{k+1}^2 \cdot q^2 = b_k \cdot b_{k+2} \cdot q^2$ $(q \neq 0)$.

Так как по индуктивному предположению

$b_{k+1}^2 = b_k \cdot b_{k+2}$, то и равенство $b_{k+2}^2 = b_{k+1} \cdot b_{k+3}$ верно, и $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать методом математической индукции и признак.

3. а) Если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n = 1$, тогда $a^1 > b^1$, что очевидно, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $a^k > b^k$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $a^{k+1} > b^{k+1}$.

Так как $a^k > b^k$ и $a > 0$, то $a^k \cdot a > b^k \cdot a$, т. е. $a^{k+1} > a \cdot b^k$.

С другой стороны, по условию $a > b$ и $b^k > 0$, следовательно, $a \cdot b^k > b \cdot b^k = b^{k+1}$.

С учетом того, что $a^{k+1} > a \cdot b^k$ и $a \cdot b^k > b^{k+1}$, по свойству транзитивности неравенств $a^{k+1} > a \cdot b^k > b^{k+1}$, т. е. $a^{k+1} > b^{k+1}$, тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. для любых $n \in \mathbb{N}$ $a^n > b^n$ (если $a > b > 0$), что и требовалось доказать.

б) $2^{n-1} \cdot (a^n + b^n) \geqslant (a+b)^n$ при $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n = 1$, тогда

$\mathrm{L} = 2^{1-1} \cdot (a^1 + b^1) = a + b$, $\quad \Pi = (a+b)^1 = a + b$,

т. е. $\mathrm{L} = \Pi$, и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $2^{k-1} \cdot (a^k + b^k) \geqslant (a+b)^k$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $\underline{2^k \cdot (a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant (a+b)^{k+1}}$.

Так как $(\varphi(k) - \text{И})$, то $2^{k-1} \cdot (a^k + b^k) \geqslant (a+b)^k$.

1. Для доказательства домножим обе части неравенства на $a + b$, получим

   $2^{k-1} \cdot (a^k + b^k) \cdot (a+b) \geqslant (a+b)^{k+1}$.

   Обозначим левую часть данного неравенства L_1, а правую — Π_1.

   $\mathrm{L}_1 = 2^{k-1} \cdot (a^k + b^k) \cdot (a+b) =$

   $$= 2^{k-1} \cdot \frac{a \cdot a^k + a \cdot b^k + b \cdot a^k + b \cdot b^k}{2} =$$

   $$= 2^{k-1} \cdot \frac{a^{k+1} + a \cdot b^k + b \cdot a^k + b^{k+1}}{2} = \mathrm{L}_1;$$

   $\Pi_1 = (a+b)^{k+1}$.

   Очевидно, что

   $$2^{k-1} \cdot \frac{a^{k+1} + a \cdot b^k + b \cdot a^k + b^{k+1}}{2} \geqslant (a+b)^{k+1}.$$

   Таким образом, $\mathrm{L}_1 \geqslant (a+b)^{k+1}$.

2. Далее, для доказательства неравенства
$2^k \cdot (a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant (a+b)^{k+1}$
рассмотрим неравенство
$a^{k+1} + a \cdot b^k + b \cdot a^k + b^{k+1} \leqslant 2 \cdot a^{k+1} + 2 \cdot b^{k+1}$
и докажем, что оно верно.
Перенесем левую часть неравенства в правую и приведем подобные члены.
$a^{k+1} - a \cdot b^k - b \cdot a^k + b^{k+1} \geqslant 0,$
т. е. $a(a^k - b^k) - b(a^k - b^k) \geqslant 0; \quad (a-b)(a^k - b^k) \geqslant 0.$
Это абсолютно верно, потому что в предыдущем упражнении было доказано, что $(a-b)$ и $(a^k - b^k)$ — одного знака.
Итак, еще раз подчеркнем, что
$\dfrac{a^{k+1} + a \cdot b^k + b \cdot a^k + b^{k+1}}{2} \leqslant a^{k+1} + b^{k+1}$ — доказано.
3. Тогда $2^k \cdot (a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant$
$\geqslant 2^k \dfrac{a^{k+1} + ab^k + ba^k + b^{k+1}}{2} \geqslant \qquad (2^k > 2^{k-1})$
$\geqslant 2^{k-1} \dfrac{a^{k+1} + ab^k + ba^k + b^{k+1}}{2} = \mathrm{L}_1,$
т. е. $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant \mathrm{L}_1 \geqslant (a+b)^{k+1}.$
По транзитивности неравенств
$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geqslant (a+b)^{k+1}$, тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что
1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ при $a > 0$, $b > 0$ $2^{n-1}(a^n + b^n) \geqslant (a+b)^n$, что и требовалось доказать.

Практикум 6

Рассмотрим решение более сложных заданий на доказательство неравенств.

Пример 1. Докажем, что $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$, где $n\in\mathbb{N}$ и $a_i\geqslant 0$ для любых $i\in\mathbb{N}$.

Рассмотрим доказательство О. Коши (1789–1857).

1. При $n=1$ $\quad a_1\geqslant a_1$, т. е. $(\varphi(1)-\text{И})$.

   При $n=2$ $\quad \dfrac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1\cdot a_2}\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow a_1-2\sqrt{a_1\cdot a_2}+a_2\geqslant 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geqslant 0,$

   т. е. $(\varphi(2)-\text{И})$.

2. Пусть $(\varphi(k)-\text{И})$, т. е. $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}$.

   Докажем, что тогда $(\varphi(2k)-\text{И})$.

   Действительно, $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k}}{2k}=$

   $$=\frac{\dfrac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{2}}{k}\geqslant$$

   $$\geqslant\sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}\geqslant$$

   $$\geqslant\sqrt[k]{\sqrt{a_1\cdot a_2}\cdot\sqrt{a_3\cdot a_4}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a_{2k-1}\cdot a_{2k}}}=$$

   $$=\sqrt[2k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2k}}.$$

   Таким образом, мы доказали, что из $(\varphi(k)-\text{И})$ следует, что $(\varphi(2k)-\text{И})$.

   С другой стороны, так как $(\varphi(2)-\text{И})$, то истинность утверждения доказана при $n=2;4;8;16\ldots$, т. е. при любых $n=2^l$ $(l\in\mathbb{N})$.

3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, но $n \neq 2^l$. Тогда существует $q \in \mathbb{N}$, такое что $n + q = 2^l$. Следовательно, по ранее доказанному
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+q}}{n+q} \geqslant \sqrt[n+q]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+q}},$$
где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+q} > 0$.
Так как выбор $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+q}$ произволен, то положим
$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{n+q} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
(q — число равных слагаемых), тогда
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot q}{n+q} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[n+q]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^q};$$
$$\frac{n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)q}{n(n+q)} =$$
$$= \frac{(n+q)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n(n+q)} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[n+q]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^q};$$
$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{n+q} \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdot + a_n}{n}\right)^q,$$
т. е. $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.
Окончательно $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.
Итак, было доказано, что

1. ($\varphi(1)$ — И);
2. Из ($\varphi(k)$ — И) следует, что ($\varphi(k+1)$ — И).

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ ($\varphi(n)$ — И).
Отметим, что равенство всегда возможно только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Пример 2. Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\dfrac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$.

Полагая в предыдущей задаче-теореме Коши

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \ldots,\ a_n = n,$ получим

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n},\ \text{т. е.}\ \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} > \sqrt[n]{n!},$$

отсюда для любого $n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Докажем, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

т. е. что $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ — возрастающая последовательность.

Для доказательства используем теорему Коши, полагая, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, а $a_{n+1} = 1$. Тогда

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1}.$$

Преобразовав левую часть, получим

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n+1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Тогда $1+\dfrac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}$.

Возведя в степень $n+1$, получим $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, что и требовалось доказать.

Пример 4. При каких условиях $A_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ — наибольшее, если $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$ при $x_i > 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$?

По теореме Коши $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$,

т. е $\dfrac{C}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Следовательно, $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant \left(\dfrac{C}{n}\right)^n$.

Так как равенство возможно только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (теорема Коши), то отсюда следует, что наибольшее $A_n = \left(\dfrac{C}{n}\right)^n$.

Итак, наибольшее значение произведения $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ при постоянной сумме $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C$ достигается только при равенстве слагаемых.

Пример 5. При каких условиях $B_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ — наименьшее, если $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = a^n$ при $x_i > 0$ и число $a > 0$?

Вновь используем теорему Коши:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}, \text{ т. е. } \frac{B_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Значит $B_n \geqslant na$, а его наименьшее значение равно na и достигается только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

В частности, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$ $(x_i > 0)$.

Пример 6. Пусть $x + y + z = c$ $(x, y, z > 0)$. Найдем наибольшее значение $F(x, y, z) = x^p \cdot y^q \cdot z^r$, где $p, q, r \in \mathbb{N}$.

Так как $x + y + z = p\dfrac{x}{p} + q\dfrac{y}{q} + r\dfrac{z}{r}$, то здесь $p + q + r$ слагаемых.

Отметим, что $\underbrace{\dfrac{x}{p} \cdot \dfrac{x}{p} \cdot \ldots \cdot \dfrac{x}{p}}_{p \text{ множителей}} \cdot \underbrace{\dfrac{y}{q} \cdot \dfrac{y}{q} \cdot \ldots \cdot \dfrac{y}{q}}_{q \text{ множителей}} \cdot \underbrace{\dfrac{z}{r} \cdot \dfrac{z}{r} \cdot \ldots \cdot \dfrac{z}{r}}_{r \text{ множителей}} =$

$$= \left(\frac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\frac{y}{q}\right)^q \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^r = \frac{1}{p^p \cdot q^q \cdot r^r} \cdot x^p \cdot y^q \cdot z^r = \frac{1}{p^p \cdot q^q \cdot r^r} \cdot F(x; y; z).$$

Наибольшее значение этого выражения, а также $F(x;y;z)$, согласно теореме Коши, будет достигаться при равенстве всех сомножителей, а именно при $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$.

По свойству равных отношений имеем:

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{x+y+z}{p+q+r}=\frac{c}{p+q+r}.$$

Итак, $F(x;y;z)$ принимает наибольшее значение при

$$x=\frac{cp}{p+q+r};\quad y=\frac{cq}{p+q+r};\quad z=\frac{cr}{p+q+r},$$

и $F_{\text{наиб}}(x;y;z)=\left(\frac{c}{p+q+r}\right)^{p+q+r}\cdot p^p\cdot q^q\cdot r^r$.

Примечание. Пусть, например, $f(x)=(1+x)^3\cdot(1-x)^4$. В данном случае $p=3$ и $q=4$, а $(1+x)+(1-x)=2=c$.

Тогда $\frac{1+x}{3}=\frac{1-x}{4}=\frac{1+x+1-x}{3+4}=\frac{2}{7}$;

$1+x=\frac{3\cdot 2}{7}$; $\quad x=-\frac{1}{7}$ $(x+1>0)$;

$1-x=\frac{4\cdot 2}{7}$; $\quad x=-\frac{1}{7}$.

Значит, $f_{\text{наиб}}(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^4=\frac{6^3\cdot 8^4}{7^7}$.

Практикум 7 (Решение более сложных заданий на доказательства)

Доказите, что:

1. $\left(a^{4n+1}-a\right) \vdots 30$ при $a, n \in \mathbb{N}$.

2. а) $3^n > n^3 - 3n^2 + 4$ при $n \in \mathbb{N}$;

б) $4^n > \left(n^2+n+1\right)^2$ при $n \in \mathbb{N}$.

3. а) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ при $n \in \mathbb{N}$;

б) $\dfrac{3}{1\cdot2}+\dfrac{13}{2\cdot3}+\dfrac{37}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\dfrac{n\left(n^2+2n+3\right)}{2(n+1)}$ при $n \in \mathbb{N}$;

в) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)^2=$

$=\dfrac{\left(x^{2n+2}+1\right)\left(x^{2n}-1\right)}{x^{2n}\left(x^2-1\right)}+2n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Выдвините гипотезу и докажите ее:

4. а) $S_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$;

б) $S_n = 2+7+14+23+\ldots$

5. а) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)=\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$;

б) $\sin x+2\sin(2x)+\ldots+n\sin(nx)=$

$$=\frac{(n+1)\sin(nx)-n\sin\big((n+1)x\big)}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Самостоятельная работа 1

Вариант I

Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$:

1. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.
2. $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.
3. $\left(6^{2n}-1\right) ⋮ 35$.
4. $2^n > n^2$.

Вариант II

Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$:

1. $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{4n(n+1)}=\dfrac{n}{2(n+1)}$.
2. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
3. $(7^n-1) ⋮ 6$.
4. $3^n > n^3$.

Решение практикума 7

Докажите:

1. $\left(a^{4n+1}-a\right) \vdots 30$ при $a, n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n=1$; $f(n)=a^{4n+1}-a$, тогда

$f(1)=a^5-a=a(a^4-1)=a(a-1)(a+1)(a^2+1)=$

$=a(a-1)(a+1)(a^2-4+5)=$

$=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5a(a-1)(a+1).$

Известно, что произведение пяти последовательных целых чисел делится на 2, на 3 и на 5, т. е. делится на 30. Поскольку это верно и для первого, и для второго слагаемого, значит $f(1) \vdots 30$, и $(\varphi(1) - И)$.

Пусть $(\varphi(k) - И)$, т. е. $\left(a^{4k+1}-a\right) \vdots 30$ $(f(k) \vdots 30)$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - И)$,

т. е. $\left(a^{4k+5}-a\right) \vdots 30$ $(f(k+1) \vdots 30)$.

$f(k+1)=a^{4k+5}-a=\left(a^{4k+1}-a\right)+\left(a^{4k+5}-a^{4k+1}\right)=$

$=\left(a^{4k+1}-a\right)+a^{4k}\cdot\left(a^5-a\right).$

$\left(a^{4k+1}-a\right) \vdots 30$ — по индуктивному предположению,

$\left(a^5-a\right) \vdots 30$ — было доказано ранее.

Значит

1. $(\varphi(1) - И)$;

2. Из $(\varphi(k) - И)$ следует, что $(\varphi(k+1) - И)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ при $a \in \mathbb{N}$

$\left(a^{4n+1}-a\right) \vdots 30$, что и требовалось доказать.

2. а) $3^n > n^3 - 3n^2 + 4$ при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n=1$, тогда $3>1^3-3\cdot1^2+4=2$, т. е. ($\varphi(1)$ — И).

Пусть ($\varphi(k)$ — И), т. е. $3^k > k^3 - 3k^2 + 4$.

Докажем, что тогда ($\varphi(k+1)$ — И),

т. е. $3^{k+1} > (k+1)^3 - 3(k+1)^2 + 4$.

$(k+1)^3-3(k+1)^2+4=k^3+3k^2+3k+1-3k^2-6k-3+4=$
$= k^3 - 3k + 2$.

Значит, требуется доказать, что $3^{k+1} > k^3 - 3k + 2$.

Так как ($\varphi(k)$ — И), то $3^k > k^3 - 3k^2 + 4$.

Умножим обе части неравенства на 3:

$3^{k+1} > 3k^3-9k^2+12=(k^3-3k+2)+(2k^3-9k^2+3k+10)$.

Положим $t(k) = 2k^3 - 9k^2 + 3k + 10$.

При $k = 3$ $\quad t(3) = 2\cdot27 - 9\cdot9 + 3\cdot3 + 10 = -8 < 0$.

При $k = 4$ $\quad t(4) = 2\cdot4^3 - 9\cdot16 + 3\cdot4 + 10 = 6 > 0$.

Таким образом, при $k \geqslant 4$ $\quad t(k)=2k^3-9k^2+3k+10 \geqslant 0$, следовательно,

$3^{k+1} > k^3 - 3k + 2$, т. е. ($\varphi(k+1)$ — И) при $k \geqslant 4$.

Отметим, что база индукции при этом изменится.

Пусть $n=3$, тогда $3^3>3^3-3\cdot3^2+4=4$, т. е. ($\varphi(3)$ — И).

Итак, было доказано, что

1. ($\varphi(3)$ — И);
2. Из ($\varphi(k)$ — И) при $k>3$ следует, что ($\varphi(k+1)$ — И).

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ при $n \geqslant 3$

$3^n > n^3 - 3n^2 + 4$, что и требовалось доказать.

Примечание. $k \geqslant 4$ — условие перехода от ($\varphi(k)$ — И) к ($\varphi(k+1)$ — И). При $k = 2$ $\quad 3^2 > 2^3 - 3\cdot2^2 + 4 = 0$, т. е. ($\varphi(2)$ — И). Поскольку неравенство истинно при $k = 1$, $k=2$ и $k = 3$, то доказали, что $3^n > n^3 - 3n^2 + 4$ верно для любых $n \in \mathbb{N}$.

б) $4^n > \left(n^2+n+1\right)^2$ при $n \in \mathbb{N}$.

Найдем базу индукции:

при $n=1$ $4^1 > (1^2+1+1)^2$; $4 > 9$ — ложно;

при $n=2$ $4^2 > (2^2+2+1)^2$; $16 > 49$ — ложно;

при $n=3$ $4^3 > (3^2+3+1)^2$; $64 > 169$ — ложно;

при $n=4$ $4^4 > (4^2+4+1)^2$; $256 > 441$ — ложно;

при $n=5$ $4^5 > (5^2+5+1)^2$; $1024 > 961$ — истинно.

Итак, $(\varphi(5) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $4^k > \left(k^2+k+1\right)^2$.

Докажем, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $4^{k+1} > \left((k+1)^2+(k+1)+1\right)^2$.

$\left((k+1)^2+(k+1)+1\right)^2 = \left(k^2+3k+3\right)^2 =$

$= k^4+9k^2+9+6k^3+6k^2+18k = k^4+6k^3+15k^2+18k+9.$

Итак, требуется доказать, что

$4^{k+1} > k^4+6k^3+15k^2+18k+9.$

$(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $4^k > \left(k^2+k+1\right)^2$.

Умножим обе части неравенства на 4:

$4^{k+1} > 4\left(k^2+k+1\right)^2 = 4\left(k^4+k^2+1+2k^3+2k^2+2k\right) =$

$= 4k^4+8k^3+12k^2+8k+4 =$

$= \left(k^4+6k^2+15k^2+18k+9\right) +$

$+ \left(3k^4+2k^3-3k^2-10k-5\right).$

$4^{k+1} > k^4+6k^2+15k^2+18k+9,$

если $t(k) = 3k^4+2k^3-3k^2-10k-5 > 0.$

Рассмотрим $t(5) = 3\cdot 5^4+2\cdot 5^3-3\cdot 5^2-10\cdot 5-5 =$

$= 1875+250-75-50-5 = 1995 > 0.$

Очевидно, что при $k \geqslant 5$ $t(k) > 0$.

Значит из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, было доказано, что

1. $(\varphi(5) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$ при $k \geqslant 5$.

Таким образом, для любых $n \geqslant 5 \quad (\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. при $n \geqslant 5 \quad 4^n > \left(n^2 + n + 1\right)^2$, что и требовалось доказать.

3. а) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n = 1$.

$\mathrm{L} = S_1 = a_1 = 1\cdot2\cdot3$;

$\Pi = \dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)\cdot(1+3)}{4} = 1\cdot2\cdot3.$

Тогда $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е.

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

Тогда $S_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$.

Рассмотрим $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)(k+3) =$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4},$$

значит $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - И)$;
2. Из $(\varphi(k) - И)$ следует, что $(\varphi(k+1) - И)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - И)$,
т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$
$= \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, что и требовалось доказать.

б) $\dfrac{3}{1 \cdot 2} + \dfrac{13}{2 \cdot 3} + \dfrac{37}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{n^3+n^2+1}{n(n+1)} = \dfrac{n\left(n^2+2n+3\right)}{2(n+1)}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $n = 1$.

$$\mathrm{L} = S_1 = a_1 = \frac{3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2};$$

$$\Pi = \frac{1 \cdot \left(1^2 + 2 \cdot 1 + 3\right)}{2 \cdot (1+1)} = \frac{6}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - И)$.

Пусть $(\varphi(k) - И)$,

т. е. $S_k = \dfrac{3}{1 \cdot 2} + \dfrac{13}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{k^3+k^2+1}{k(k+1)} = \dfrac{k\left(k^2+2k+3\right)}{2(k+1)}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - И)$,

т. е. $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \dfrac{(k+1)\left((k+1)^2 + 2(k+1) + 3\right)}{2(k+2)}$,

или, иначе говоря, $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)\left(k^2+4k+6\right)}{2(k+2)}$.

Так как $(\varphi(k) - И)$, т. е. $S_k = \dfrac{k\left(k^2+2k+3\right)}{2(k+1)}$, то

$$S_{k+1} = \frac{k\left(k^2+2k+3\right)}{2(k+1)} + \frac{(k+1)^3 + (k+1)^2 + 1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)\left(k^2+2k+3\right) + 2\left(k^3+3k^2+3k+1+k^2+2k+1+1\right)}{2(k+1)(k+2)} =$$

$$=\frac{k(k+2)\left(k^2+2k+3\right)+2\left(k^3+4k^2+5k+3\right)}{2(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k^4+4k^3+7k^2+6k+2k^3+8k^2+10k+6}{2(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k^4+6k^3+15k^2+16k+6}{2(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{(k+1)\left(k^3+5k^2+10k+6\right)}{2(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)\left(k^2+4k+6\right)}{2(k+2)},$$

т. е. $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n\in\mathbb{N}$ $(\varphi(n)$ — И$)$, т. е.

$$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{37}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\frac{n\left(n^2+2n+3\right)}{2(n+1)},$$

что и требовалось доказать.

в) $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(x^{2n+2}+1\right)\left(x^{2n}-1\right)}{x^{2n}\left(x^2-1\right)}+2n \text{ при } n\in\mathbb{N}.$$

Пусть $n=1$.

$$\mathrm{L}=S_1=a_1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2.$$

$$\Pi=\frac{\left(x^4+1\right)\left(x^2-1\right)}{x^2\left(x^2-1\right)}+2=\frac{x^4+1}{x^2}+2=\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}=$$

$$=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2.$$

Следовательно, $\mathrm{L}=\Pi$, т. е. $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k) - И)$,

т. е. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)^2=$

$=\dfrac{\left(x^{2k+2}+1\right)\left(x^{2k}-1\right)}{x^{2k}\left(x^2-1\right)}+2k.$

Докажем, что $(\varphi(k+1) - И)$,

т. е. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)^2=$

$=\dfrac{\left(x^{2k+4}+1\right)\left(x^{2k+2}-1\right)}{x^{2k+2}\left(x^2-1\right)}+2(k+1).$

Так как $(\varphi(k) - И)$,

т. е. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)^2=$

$=\dfrac{\left(x^{2k+2}+1\right)\left(x^{2k}-1\right)}{x^{2k}\left(x^2-1\right)}+2k$, то

$$S_{k+1}=S_k+\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(x^{2k+2}+1\right)\left(x^{2k}-1\right)}{x^{2k}\left(x^2-1\right)}+2k+\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(x^{2k+2}+1\right)\left(x^{2k}-1\right)}{x^{2k}\left(x^2-1\right)}+\underline{2k}+\frac{\left(x^{2k+2}+1\right)^2}{x^{2k+2}}-2+\underline{2}=$$

$$=\frac{\left(x^{2k+2}+1\right)\left(x^{2k}-1\right)}{x^{2k}\left(x^2-1\right)}+\frac{\left(x^{2k+2}+1\right)^2-2x^{2k+2}}{x^{2k+2}}+$$

$$+2(k+1)=$$

$$=\frac{x^2\left(x^{4k+2}+x^{2k}-x^{2k+2}-1\right)+\left(x^{4k+4}+1\right)\left(x^2-1\right)}{x^{2(k+1)}\left(x^2-1\right)}+$$

$$+2(k+1)=$$

$$=\frac{x^{4k+4}+x^{2k+2}-x^{2k+4}-x^2+x^2\cdot x^{4k+4}+x^2-x^{4k+4}-1}{x^{2(k+1)}\left(x^2-1\right)}+$$

$$+2(k+1)=$$

$$= \frac{x^{2k+2} - x^2 \cdot x^{2k+2} + x^2 \cdot x^{4k+4} - 1}{x^{2(x+1)}\left(x^2-1\right)} + 2(k+1) =$$

$$= \frac{\left(x^{2k+2}-1\right) + x^2\left(x^{4k+4} - x^{2k+2}\right)}{x^{2(k+1)}\left(x^2-1\right)} + 2(k+1) =$$

$$= \frac{\left(x^{2k+2}-1\right) + x^{2k+2} \cdot x^2\left(x^{2k+2} - 1\right)}{x^{2(k+1)}\left(x^2-1\right)} + 2(k+1) =$$

$$= \frac{\left(x^{2k+2}-1\right)\left(x^{2k+4}+1\right)}{x^{2(k+1)}\left(x^2-1\right)} + 2(k+1),$$

т. е. $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n)$ — И$)$, т. е.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(x^{2n+2}+1\right)\left(x^{2n}-1\right)}{x^{2n}\left(x^2-1\right)} + 2n,$$

что и требовалось доказать.

Выдвинем гипотезу и докажем ее:

4. а) $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

Для нахождения формулы суммы поступим так же, как и при поиске суммы квадратов:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пусть $\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(это было доказано ранее).

n	1	2	3	4	5	$\dots$	n
σ_n	1	3	6	10	15	$\dots$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
S_n	1	9	36	100	225	$\dots$	?
σ_n^2	1	9	36	100	225	$\dots$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Возникает гипотеза, что $S_n = \sigma_n^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Проверим это.

Пусть $n = 1$.

$$\mathrm{L} = 1; \quad \Pi = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = 1,$$

следовательно, $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$.

Теперь пусть $(\varphi(k) - \text{И})$,

т. е. $S_k = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

По условию $S_k = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$, тогда

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{(k+1)^2\big(k^2 + 4(k+1)\big)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

что и требовалось доказать.

б) $S_n = 2 + 7 + 14 + 23 + \ldots$

Разность соседних чисел в данной сумме образует арифметическую прогрессию.

При решении на странице 127 (в) был рассмотрен общий метод решения задач такого вида, по которому $S_n = na_1 + \dfrac{n(n^2-1)}{6}\cdot d$, где a_1 — первый член последовательности, а d есть разность двух рядом стоящих членов прогрессии. В данном случае $a_1 = 2$, а $d = 5$, тогда

$$S_n = n\cdot 2 + \frac{n(n^2-1)}{6}\cdot 5 = \frac{12n + 5n^3 - 5n}{6} = \frac{5n^3+7n}{6} =$$

$= \frac{1}{6}n\left(5n^2+7\right)$, т. е. $\boxed{S_n = \frac{1}{6}n\left(5n^2+7\right)}$, что и требовалось доказать.

5. а) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta) = \dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

Пусть $n = 1$, тогда

$$\mathrm{L} = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\alpha-\beta}{2} =$$

$$= \frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

$$\Pi = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{1\cdot\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{1+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Следовательно, $\mathrm{L} = \Pi$, значит $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е.

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha+k\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{k+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$, т. е.

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin\left(\alpha + (k+1)\beta\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{(k+1)\beta}{2}\right)\cdot \sin\frac{k+2}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Так как $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$, то

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin\big(\alpha + (k+1)\beta\big) =$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cdot \sin\frac{k+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} + \sin\big(\alpha + (k+1)\beta\big) =$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cdot \sin\frac{(k+1)\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\big(\alpha + (k+1)\beta\big)}{\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x\cdot\sin y = \dfrac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big) \\ \hline \cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2} \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\cdot\left(\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2} - \frac{k\beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \underline{-\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2} + \frac{k\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\right)} + \right.$$

$$\left. \underline{+\cos\left(\frac{\beta}{2} - \alpha - k\beta - \beta\right)} - \cos\left(\frac{\beta}{2} + \alpha + k\beta + \beta\right)\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\beta}{2} + \alpha + k\beta\right)\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{3\beta}{2} + \alpha + k\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{3\beta}{2} - \alpha - k\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k+1}{2}\beta\right)\cdot\sin\frac{k+2}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

т. е. L = П, а значит $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$, т. е.

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

что и требовалось доказать.

б) $\sin x + 2\sin(2x) + \ldots + n\sin(nx) =$

$$= \frac{(n+1)\sin(nx) - n\sin\big((n+1)x\big)}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

1. Пусть $n = 1$. $\mathrm{L} = \sin x$;

$$\Pi = \frac{2\sin x - \sin 2x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin x \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \sin x, \quad \text{т. е. } (\varphi(1) - \text{И}).$$

2. Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$,

т. е. $\sin x + 2\sin(2x) + \ldots + k\sin(kx) =$

$$= \frac{(k+1)\sin(kx) - k\sin\big((k+1)x\big)}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Докажем, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $\sin x + 2\sin(2x) + \ldots + (k+1)\sin\big((k+1)x\big) =$

$$= \frac{(k+2)\sin\big((k+1)x\big) - (k+1)\sin\big((k+2)x\big)}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Так как $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$, то

$$\sin x + 2\sin(2x) + \ldots + k\sin(kx) + (k+1)\sin\big((k+1)x\big) =$$

$$= \frac{(k+1)\sin kx - k\sin\big((k+1)x\big)}{4\sin^2\frac{x}{2}} + (k+1)\sin\big((k+1)x\big) =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \Big((k+1)\sin kx - k\sin\big((k+1)x\big) + $$
$$+ (k+1)\sin\big((k+1)x\big) \cdot 2(1-\cos x)\Big) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4\sin^2\dfrac{x}{2} = 2(1-\cos x) \\ \sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big) \end{array}}$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \Big((k+2)\sin\big((k+1)x\big) + \underline{(k+1)\sin kx} -$$
$$-(k+1)\sin\big((k+2)x\big) - \underline{(k+1)\sin kx}\Big) =$$

$$= \frac{(k+2)\sin\big((k+1)x\big) - (k+1)\sin\big((k+2)x\big)}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$, т. е.

$$\sin x + 2\sin(2x) + \ldots + n\sin(nx) =$$
$$= \frac{(n+1)\sin(nx) - n\sin\big((n+1)x\big)}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Тренировочная работа 4

Вариант I

Докажите:

1. $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \dfrac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}$,
где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия;

2. $\left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right) \vdots\, 9$;

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ (для любого $n \in \mathbb{N}$, где $n \geqslant 2$).

4. Выведите формулу суммы и докажите ее верность:
$S_n = \dfrac{1}{3 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 13} + \ldots$

Вариант II

Докажите:

1. $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$ при $n > 1$;

2. $(8^n - 1) \vdots\, 7$;

3. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$.

4. Выведите формулу суммы и докажите ее верность:
$S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots$

Вариант III

Докажите:

1. $2 + 5 + 11 + \ldots + \left(3 \cdot 2^{n-1} - 1\right) = 3\left(2^n - 1\right) - n;$
2. $\left(n^7 - n\right) \vdots 7;$
3. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1.$
4. Выведите формулу суммы и докажите ее верность: $S_n = 1 + 7 + 19 + 37 + \ldots + (3n^2 - 3n + 1).$

Вариант IV

Докажите:

1. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n};$
2. $\left(11^{n+2} + 12^{2n+1}\right) \vdots 133;$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$
4. Найдите закономерность суммирования и докажите ее верность: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!.$

Вариант V

Докажите:

1. $(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1);$
2. $\left(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}\right) \vdots 19;$
3. $(n+1)^n < n^{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3.$
4. Найдите закономерность суммирования и докажите ее верность: $S_n = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{36} + \dfrac{7}{144} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$

Вариант VI

Доказите:

1. $$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+\left(2^n x-\frac{1}{2^n x}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4^n\cdot x^2}\right)-2(n+1);$$

2. $(4^n+15n-1)\ \vdots\ 9;$

3. $\dfrac{a_1+a_n}{2} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$, где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — члены арифметической прогрессии, $a_n\geqslant 0$.

4. Найдите формулу суммы и докажите ее верность:
$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\ldots+\dfrac{1}{b_n}$, где $b_1,b_2,\ldots,b_n$ — члены геометрической прогрессии.

Решение тренировочной работы 4

Вариант I

Докажите:

1. $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \dfrac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}$,

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия.

Учитывая, что a_n — арифметическая прогрессия, представим равенство в ином виде:

$$\frac{1}{a_1 \cdot (a_1 + d)} + \frac{1}{(a_1 + d) \cdot (a_1 + 2d)} + \ldots + \frac{1}{\big(a_1 + (n-1)d\big) \cdot (a_1 + nd)} = \frac{n}{a_1 \cdot (a_1 + nd)}.$$

Пусть $n = 1$, тогда

$\mathrm{L} = S_1 = \dfrac{1}{a_1 \cdot (a_1 + d)}$;

$\Pi = \dfrac{1}{a_1 \cdot a_{1+1}} = \dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} = \dfrac{1}{a_1 \cdot (a_1 + d)}$.

Следовательно, $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = \dfrac{k}{a_1(a_1 + kd)}$.

Необходимо доказать, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{a_1\big(a_1 + (k+1)d\big)}$.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(a_1 + kd)\big(a_1 + (k+1)d\big)} =$$

$$= \frac{k}{a_1(a_1 + kd)} + \frac{1}{(a_1 + kd)\big(a_1 + (k+1)d\big)} =$$

$$= \frac{k\big(a_1 + (k+1)d\big) + a_1}{a_1(a_1 + kd)\big(a_1 + (k+1)d\big)} = \frac{ka_1 + a_1 + k(k+1)d}{a_1(a_1 + kd)\big(a_1 + (k+1)d\big)} =$$

$$= \frac{(k+1)(a_1 + kd)}{a_1(a_1 + kd)\big(a_1 + (k+1)d\big)} = \frac{k+1}{a_1\big(a_1 + (k+1)d\big)}.$$

Итак, $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{a_1\bigl(a_1+(k+1)d\bigr)}$, значит $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,
т. е. $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \dfrac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}$,
что и требовалось доказать.

2. $\Bigl(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\Bigr) \,\vdots\, 9$.

Пусть $n = 1$. $\mathrm{L} = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \,\vdots\, 9$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $f(k) = \Bigl(k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3\Bigr) \,\vdots\, 9$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$, т. е. $f(k+1) \,\vdots\, 9$.

$$f(k+1) = \Bigl((k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3\Bigr) =$$
$$= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 3 \cdot 3k^2 + 3 \cdot k \cdot 9 + 3^3 =$$
$$= \underbrace{f(k)}_{\vdots\, 9} + \underbrace{9 \cdot (k^2 + 3k + 3)}_{\vdots\, 9}.$$

Значит $f(k+1) \,\vdots\, 9$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,
т. е. $\Bigl(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\Bigr) \,\vdots\, 9$,
что и требовалось доказать.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ (для любого $n\in\mathbb{N}$, где $n\geqslant 2$).

Пусть $n=2$.

$\mathrm{L}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$; $\quad \Pi=\sqrt{2}$.

Тогда $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$; $\quad \sqrt{2}+1>2$; $\quad \sqrt{2}>1$, т. е. $\mathrm{L}>\Pi$, значит $(\varphi(2)-\text{И})$.

Пусть $(\varphi(k)-\text{И})$, т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)-\text{И})$,

т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

Так как $(\varphi(k)-\text{И})$, т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$, то прибавим к левой и правой частям неравенства $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$,

тогда $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Вначале докажем, что $\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$.

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{k(k+1)}+1>k+1\Leftrightarrow\sqrt{k(k+1)}>k\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow k(k+1)>k^2\Leftrightarrow k>0$, что верно.

Тогда $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$,

значит $(\varphi(k+1)-\text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(2) - И)$;
2. Из $(\varphi(k) - И)$ следует, что $(\varphi(k+1) - И)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ при $n \geqslant 2$ $(\varphi(n) - И)$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ (для любого $n \in \mathbb{N}$ при $n \geqslant 2$), что и требовалось доказать.

4. Выведите формулу суммы и докажите ее верность:
$S_n = \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 13} + \ldots$

Так как $3, 8, 13, 18, \ldots$ — арифметическая прогрессия, где $a_1 = 3$ и $d = 5$, то $a_n = 3 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 2$.

Тогда n-е слагаемое равно $\frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$,

и $S_n = \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$.

Учтем, что

$$\frac{1}{3 \cdot 8} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{1}{8 \cdot 13} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{13}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3}\right).$$

Почленно сложим слагаемые левой и правой части. Обратим внимание на то, что в правой части при сложении останется только первое и последнее слагаемые, так как остальные взаимно уничтожатся:

$$S_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}\right) = \frac{n}{3(5n+3)}.$$

Итак, гипотеза сформулирована: $S_n = \frac{n}{3(5n+3)}$.

Докажем ее верность.

Пусть $n = 1$.

$\mathrm{L} = S_1 = \dfrac{1}{3 \cdot 8}$; $\quad \Pi = \dfrac{1}{3 \cdot (5 \cdot 1 + 3)} = \dfrac{1}{3 \cdot 8}$,

значит $\mathrm{L} = \Pi$ и $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть теперь $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $S_k = \dfrac{k}{3(5k+3)}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$, т. е. $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{3(5k+8)}$.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(5k+3)(5k+8)} = \frac{k}{3(5k+3)} + \frac{1}{(5k+3)(5k+8)} =$$

$$= \frac{k(5k+8)+3}{3(5k+3)(5k+8)} = \frac{(5k+3)(k+1)}{3(5k+3)(5k+8)} = \frac{k+1}{3(5k+8)},$$

т. е. $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $\quad (\varphi(n)$ — И$)$,

т. е. $\dfrac{1}{3 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(5n-2)(5n+3)} = \dfrac{n}{3(5n+3)}$,

что и требовалось доказать.

Вариант II

Докажите:

1. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ при $n>1$.

Пусть $n=2$.

$\mathrm{L}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; $\Pi=\frac{2+1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$,

следовательно, $\mathrm{L}=\Pi$, т.е. $(\varphi(2)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т.е.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}.$$

Докажем, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$, т.е.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Умножим обе части равенства

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$$

на $\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$.

Заметим при этом, что

$1-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$. Тогда

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$

$=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}$, т.е. $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(2)$ — И$)$;

2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ при $n > 1$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$,

что и требовалось доказать.

2. $(8^n - 1) \,\vdots\, 7$.

Положим $f(n) = 8^n - 1$.

Пусть $n = 1$, тогда $f(1) = 8^1 - 1 = 7 \,\vdots\, 7$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $f(k) \,\vdots\, 7$, или $(8^k - 1) \,\vdots\, 7$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $f(k+1) \,\vdots\, 7$, или $(8^{k+1} - 1) \,\vdots\, 7$.

$f(k+1) = 8^{k+1} - 1 = 8 \cdot 8^k - 1 = \underbrace{7 \cdot 8^k}_{\vdots\, 7} + \underbrace{8^k - 1}_{\vdots\, 7}$,

значит $(8^{k+1} - 1) \,\vdots\, 7$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $(8^n - 1) \,\vdots\, 7$, что и требовалось доказать.

3. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Пусть $n = 1$, тогда $\frac{1}{2} > \frac{13}{24}$, т. е. $(\varphi(1) -$ Л$)$ (ложь).

Пусть $n = 2$, тогда $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$, т. е. $(\varphi(2) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} + \ldots + \dfrac{1}{2k} > \dfrac{13}{24}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} + \ldots + \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2k+1} + \dfrac{1}{2(k+1)} > \dfrac{13}{24}$.

Так как $(\varphi(k) - \text{И})$, то $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} + \ldots + \dfrac{1}{2k} > \dfrac{13}{24}$.

Прибавим к обеим частям $\dfrac{1}{2k+1} + \dfrac{1}{2k+2}$:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}.$$

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(2) - \text{И})$;

2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ при $n > 1$ $\quad(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$,

что и требовалось доказать.

4. Выведите формулу суммы и докажите ее верность:

$S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots$

Обратим внимание на то, что *каждое из чисел*, образующих сумму, а этих чисел n, связано с суммой первых n членов множества натуральных чисел.

Действительно, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (арифметическая прогрессия).

$$a_1 = 1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2};$$
$$a_2 = 3 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2};$$
$$a_3 = 6 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2};$$
$$a_4 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2};$$
$$a_5 = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

тогда $S_n = \dfrac{1 \cdot 2}{2} + \dfrac{2 \cdot 3}{2} + \dfrac{3 \cdot 4}{2} + \ldots + \dfrac{n(n+1)}{2} =$
$= \dfrac{1}{2}\big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)\big).$

Рассмотрим $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) =$
$= (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 4) + \ldots + \big((n+1)^2 - (n+1)\big) =$
$= \big(2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2\big) - \big(2 + 3 + \ldots + (n+1)\big) =$
$= \big(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2\big) - \big(1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1)\big).$

Так как ранее было доказано, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$
$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (тождество Архимеда),

то $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$

Кроме того, $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}.$

Тогда

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(2n+3-3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Итак, гипотеза сформулирована: $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Докажем это.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = 1$; $\quad \Pi = \dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{6} = 1$,

т. е. $\mathrm{L} = \Pi$, значит $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$,

т. е. $S_k = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$.

Докажем, что тогда $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$,

т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

$S_{k+1} = S_k + \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$;

$S_{k+1} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6} + \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} =$

$= \dfrac{(k+1)(k+2)}{6}\cdot)(k+3)$, значит $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $\quad (\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$,

что и требовалось доказать.

Вариант III

Докажите:

1. $2+5+11+\ldots+\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)=3\left(2^n-1\right)-n.$

Пусть $n=1$.

$\mathrm{L}=2;\quad \Pi=3\cdot(2^1-1)-1=2,$

следовательно, $\mathrm{L}=\Pi$, т. е. $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $S_k=3\cdot(2^k-1)-k.$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$,

т. е. $S_{k+1}=3\cdot(2^{k+1}-1)-(k+1).$

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=3\cdot(2^k-1)-k+(3\cdot 2^k-1)=$

$=3\cdot 2^k-3-k+3\cdot 2^k-1=3\cdot 2^{k+1}-3-(k+1)=$

$=3\cdot(2^{k+1}-1)-(k+1)$, значит $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n\in\mathbb{N}$ $(\varphi(n)$ — И$)$,

т. е. $2+5+11+\ldots+\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)=3\left(2^n-1\right)-n$, что и требовалось доказать.

2. $\left(n^7-n\right)\ \vdots\ 7.$

Положим $f(n)=n^7-n$.

Пусть $n=1$. $f(1)=1^7-1=0\ \vdots\ 7$, т. е. $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $\left(k^7-k\right)\ \vdots\ 7$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$,

т. е. $\left((k+1)^7-(k+1)\right)\vdots\ 7$.

$f(k+1) = (k+1)^7 - (k+1) =$
$= k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - (k+1) =$
(см. Шахмейстер А. Х. Уравнения. СПб. — М., 2011. С. 139)

$$= \underbrace{k^7 - k}_{\vdots\, 7} + \underbrace{7 \cdot (k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)}_{\vdots\, 7},$$

т. е. $f(k+1) \,\vdots\, 7$, значит $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n)$ — И$)$,
т. е. $\left(n^7 - n\right) \,\vdots\, 7$, что и требовалось доказать.

3. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1.$

Положим $f(n) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1}$.

Обратим внимание: так как число слагаемых в левой части неравенства равно $2n+1$, то при разных n количество слагаемых будет различным $(3n+1 = n + \underline{2n+1})$.

Пусть $n = 1$, в этом случае слагаемых будет три:
$f(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$.

Пусть $n = 2$, тогда слагаемых будет пять:
$f(2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7}$.

Рассмотрим $f(2) - f(1) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right) =$
$= \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{105} > 0.$

Пусть $n = 3$, тогда число слагаемых — семь:

$$f(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \underline{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}};$$

$$f(3) - f(2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = \frac{1}{360} > 0.$$

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, тогда

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1.$$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$,

т. е. $S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots +$

$$+\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1.$$

$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$, значит

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{(3k+3)(3k+4) + (3k+2)(3k+4) + (3k+2)(3k+3)}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{27k^2 + 54k + 26}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{27k^2 + 54k + 26 - 3(3k+2)(3k+4)}{3(3k+2)(k+1)(3k+4)} =$$

$$= \frac{27k^2 + 54k + 26 - 27k^2 - 54k - 24}{3(3k+2)(k+1)(3k+4)} =$$

$$= \frac{2}{3(3k+2)(k+1)(3k+4)} > 0.$$

Значит, так как $S_{k+1} - S_k > 0$, то $S_{k+1} > S_k > 1$, тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$,

что и требовалось доказать.

4. Выведите формулу суммы и докажите ее верность:

$S_n = 1 + 7 + 19 + 37 + \ldots + (3n^2 - 3n + 1)$.

$S_1 = 1$;

$S_2 = 1 + 7 = 8$;

$S_3 = 1 + 7 + 19 = 27$;

$S_4 = 1 + 7 + 19 + 37 = 64$.

Похоже, мы уже можем сформулировать гипотезу:

$S_n = n^3$.

Докажем это утверждение методом математической индукции.

Пусть $n = 1$.

$\text{L} = 1$; $\Pi = 1^3$, значит, $\text{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = k^3$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $S_{k+1} = (k+1)^3$.

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = k^3 + 3(k+1)^2 - 3(k+1) + 1 =$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$, т. е. $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. $S_n = 1 + 7 + 19 + 37 + \ldots + (3n^2 - 3n + 1) = n^3$,

что и требовалось доказать.

Вариант IV

Докажите:

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

Отметим, что в левой части равенства $2n$ слагаемых, а в правой — n слагаемых.

Пусть $n=1$.

$\mathrm{L}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\Pi=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, значит $\mathrm{L}=\Pi$, т. е. ($\varphi(1)$ — И).

Пусть ($\varphi(k)$ — И), т. е.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Докажем, что тогда ($\varphi(k+1)$ — И), т. е.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}.$$

Так как ($\varphi(k)$ — И), то

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Для доказательства ($\varphi(k+1)$ — И) рассмотрим

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}.$$

Вычтем из этого равенства предыдущее почленно:

$$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1};$$

получилось $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}$, что верно.

Таким образом, если верно ($\varphi(k)$ — И),

то верно и ($\varphi(k+1)$ — И).

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$,

что и требовалось доказать.

2. $\left(11^{n+2}+12^{2n+1}\right) \,\vdots\, 133.$

Пусть $n=1$, тогда

$11^{1+2}+12^{2+1}=11^3+12^3=(11+12)(11^2-11\cdot 12+12^2)=$

$=23\cdot(121-132+144)=23\cdot 133$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right) \,\vdots\, 133.$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $\left(11^{k+3}+12^{2k+3}\right) \,\vdots\, 133.$

$$11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}=$$

$$=11\cdot 11^{k+2}+(11+133)\cdot 12^{2k+1}=$$

$$=11\cdot\underbrace{\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)}_{\vdots\, 133}+\underbrace{133\cdot 12^{2k+1}}_{\vdots\, 133},$$

значит $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $\left(11^{n+2}+12^{2n+1}\right) \,\vdots\, 133$,

что и требовалось доказать.

3. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$

Пусть $n=1$, тогда неравенство имеет вид $1<2$, а значит, $(\varphi(1)-\text{И})$.

Пусть $(\varphi(k)-\text{И})$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}.$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)-\text{И})$,

т. е. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$

Прибавим $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ к обеим частям истинного по индуктивному предположению неравенства

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$:

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$

Докажем предварительно, что $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$

Действительно, $2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1<2\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+1}$,

т. е. $2\sqrt{k^2+k}<2(k+1)-1$; $\quad 4k^2+4k<4k^2+4k+1$; $\quad 0<1$,

что верно. Значит $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$ — верно, тогда $(\varphi(k+1)-\text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)-\text{И})$;
2. Из $(\varphi(k)-\text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1)-\text{И})$.

Таким образом, для любых $n\in\mathbb{N}$ $\quad(\varphi(n)-\text{И})$,

т. е. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$,

что и требовалось доказать.

4. Найдите закономерность суммирования и докажите ее верность: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Для поиска закономерности образования суммы n членов ряда выпишем значения $n!$:

$1! = 1;$

$2! = 1 \cdot 2 = 2;$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Теперь выпишем значения суммы

$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$:

$S_1 = 1;$

$S_2 = 1 + 2 \cdot 2! = 5;$

$S_3 = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23;$

$S_4 = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119;$

$S_5 = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! = 719.$

Гипотеза проясняется: $S_n = (n+1)! - 1$.

Проверим верность гипотезы методом математической индукции.

Пусть $n = 1$.

$\mathrm{L} = S_1 = 1 \cdot 1! = 1; \quad \Pi = (1+1)! - 1 = 1,$

значит, $\mathrm{L} = \Pi$, и $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $S_k = (k+1)! - 1$.

Докажем, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$, т. е. $S_{k+1} = (k+2)! - 1$.

Так как по предположению $S_k = (k+1)! - 1$,

рассмотрим S_{k+1}:

$S_{k+1} = S_k + (k+1) \cdot (k+1)! = \underline{(k+1)!} - 1 + (k+1)\underline{(k+1)!} =$
$= (k+1)!(k+1+1) - 1 = (k+2)! - 1$, значит $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;
2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,
т. е. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$,
что и требовалось доказать.

Вариант V

Докажите:

1. $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n) = 2^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Пусть $n = 1$.

$\mathrm{L} = 1 + 1 = 2;\quad \Pi = 2^1 \cdot 1 = 2,$

значит $\mathrm{L} = \Pi$, и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$,

т. е. $(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k) = 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k+2) = 2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)$.

Умножим обе части равенства

$(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k) = 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$

на $(2k+1)\cdot 2(k+1)$:

$(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k+1)\cdot(2k+2) =$

$= 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1);$

$(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k+1)\cdot(2k+2) =$

$= 2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1),$

значит $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;

2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}\quad (\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n) = 2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$,

что и требовалось доказать.

2. $\left(5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}\right) \vdots\ 19.$

Пусть $n=1$, тогда $5^3\cdot 2^3+3^3\cdot 2^3=2^3\cdot(5^3+3^3)=$
$=2^3\cdot(5+3)(5^2-5\cdot 3+3^2)=2^6\cdot 19 \vdots\ 19,$
т. е. $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$,
т. е. $\left(5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}\right) \vdots\ 19.$
Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$,
т. е. $\left(5^{2k+3}\cdot 2^{k+3}+3^{k+3}\cdot 2^{2k+3}\right) \vdots\ 19.$

$$5^{2k+3}\cdot 2^{k+3}+3^{k+3}\cdot 2^{2k+3}=$$
$$=5^2\cdot 5^{2k+1}\cdot 2\cdot 2^{k+2}+3\cdot 3^{k+2}\cdot 2^2\cdot 2^{2k+1}=$$
$$=50\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+12\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}=$$
$$=(38+12)\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+12\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}=$$
$$=\underbrace{38\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}}_{\vdots\ 19}+\underbrace{12\cdot\left(5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}\right)}_{\vdots\ 19}.$$

Таким образом, $\left(5^{2k+3}\cdot 2^{k+3}+3^{k+3}\cdot 2^{2k+3}\right) \vdots\ 19,$
т. е. $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;

2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n\in\mathbb{N}$ $(\varphi(n)$ — И$)$,
т. е. $\left(5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}\right) \vdots\ 19,$
что и требовалось доказать.

3. $(n+1)^n < n^{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Данное неравенство равносильно

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n, \text{ т. е. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n \quad \left(\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}\right).$$

Пусть $n=3$. Тогда $4^3 < 3^4$; $64 < 81$ — значит, $(\varphi(3)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е. $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k < k$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1)$ — И$)$,

т. е. $\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{k+1} < k+1$.

Так как $1+\dfrac{1}{k+1} < 1+\dfrac{1}{k}$, то

$$\underline{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right),$$

что верно.

Как было ранее рассмотрено по индуктивному предположению, $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k < k$.

Умножим обе части предыдущего неравенства на $1+\dfrac{1}{k}$,

получим $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1} < k\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = k+1$, тогда

$$\underline{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}} < k+1, \text{ т. е. } (\varphi(k+1) \text{ — И}).$$

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(3)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ при $n \geqslant 3$ $(\varphi(n)$ — И$)$, т. е. при $n \geqslant 3$ $(n+1)^n < n^{n+1}$, что и требовалось доказать.

4. Найдите закономерность суммирования и докажите ее верность: $S_n = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Для поиска закономерности суммирования вычислим несколько первых значений:

$S_1 = \frac{3}{4}$;

$S_2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;

$S_3 = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{9 \cdot 16} = \frac{135}{144} = \frac{15}{16}$.

Предварительно можно сформулировать гипотезу:

$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. Попытаемся доказать эту гипотезу методом математической индукции.

Пусть $n = 1$.

$\mathrm{L} = \frac{3}{4}$; $\Pi = 1 - \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$, значит $\mathrm{L} = \Pi$, $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $S_k = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}$. Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$, т. е. $S_{k+1} = 1 - \frac{1}{(k+2)^2}$.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2} =$$

$$= 1 - \frac{(k+2)^2 - (2k+3)}{(k+1)^2(k+2)^2} = 1 - \frac{k^2+4k+4-2k-3}{(k+1)^2(k+2)^2} =$$

$$= 1 - \frac{k^2+2k+1}{(k+1)^2(k+2)^2} = 1 - \frac{1}{(k+2)^2},$$ значит $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, что и требовалось доказать.

Вариант VI

Докажите:

1. $$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+\left(2^nx-\frac{1}{2^nx}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4^n\cdot x^2}\right)-2(n+1).$$

Пусть $n=1$.

$$\mathrm{L}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}+4x^2-2+\frac{1}{4x^2}=$$

$$=5x^2+\frac{5}{4x^2}-4;$$

$$\Pi=\frac{1}{3}\cdot(4^2-1)\cdot\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)-2\cdot(1+1)=5\cdot\left(x^2+\frac{1}{4}x^2\right)-4=$$

$$=5x^2+\frac{5}{4x^2}-4,$$

значит $\mathrm{L}=\Pi$ и $(\varphi(1)$ — И$)$.

Пусть $(\varphi(k)$ — И$)$, т. е.

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+\left(2^kx-\frac{1}{2^kx}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(4^{k+1}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4^k\cdot x^2}\right)-2(k+1).$$

Докажем, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$, т. е.

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+\left(2^{k+1}x-\frac{1}{2^{k+1}x}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(4^{k+2}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4^{k+1}\cdot x^2}\right)-2(k+2).$$

По индукционному предположению

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+\left(2^kx-\frac{1}{2^kx}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{3}\left(4^{k+1}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4^k\cdot x^2}\right)-2(k+1).$$

Прибавим к обеим частям равенства $\left(2^{k+1}x-\frac{1}{2^{k+1}x}\right)^2$, получим:

$$\mathrm{L}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+$$
$$+\left(2^kx-\frac{1}{2^kx}\right)^2+\left(2^{k+1}x-\frac{1}{2^{k+1}x}\right)^2;$$

$$\Pi=\frac{1}{3}\cdot\left(4^{k+1}-1\right)\cdot\left(x^2+\frac{1}{4^kx^2}\right)-2(k+1)+\left(2^{k+1}x-\frac{1}{2^{k+1}x}\right)^2=$$
$$=\underline{\frac{1}{3}\cdot 4^{k+1}\cdot x^2}-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{4^{k+1}}{4^k\cdot x^2}-\underline{\underline{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^kx^2}}}-$$
$$-2k-2+\underline{4^{k+1}x^2}-2+\underline{\underline{\frac{1}{4^{k+1}\cdot x^2}}}=$$
$$=\underline{\frac{1}{3}\cdot 4^{k+2}\cdot x^2}-\underline{\underline{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{k+1}\cdot x^2}}}+\underline{\underline{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{x^2}}}-\underline{\frac{1}{3}x^2}-2(k+2)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(4^{k+2}-1\right)\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{k+1}\cdot x^2}\cdot\left(4^{k+2}-1\right)-2(k+2)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(4^{k+2}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4^{k+2}\cdot x^2}\right)-2(k+2).$$

Тогда $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+\left(2^{k+1}x-\frac{1}{2^{k+1}x}\right)^2=$

$$=\frac{1}{3}\left(4^{k+2}-1\right)\left(x^2+\frac{1}{4^{k+1}\cdot x^2}\right)-2(k+2),$$

следовательно, $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + \ldots + \left(2^n x - \frac{1}{2^n x}\right)^2 =$

$= \frac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)\left(x^2 + \frac{1}{4^n \cdot x^2}\right) - 2(n+1),$

что и требовалось доказать.

2. $(4^n + 15n - 1) \,\vdots\, 9.$

Положим $f(n) = 4^n + 15n - 1.$

Пусть $n = 1$, т. е. $f(1) = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 \,\vdots\, 9$, значит $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $f(k) = \left(4^k + 15k - 1\right) \,\vdots\, 9.$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $f(k+1) = \left(4^{k+1} + 15(k+1) - 1\right) \,\vdots\, 9.$

$f(k+1) = \left(4^{k+1} + 15(k+1) - 1\right) = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 =$

$= \left(4^k + 15k - 1\right) + 3 \cdot 4^k + 15 = \left(4^k + 15k - 1\right) + 3 \cdot \left(4^k + 5\right).$

По индуктивному предположению $\left(4^k + 15k - 1\right) \,\vdots\, 9.$

Остается доказать, что $3 \cdot \left(4^k + 5\right) \,\vdots\, 9$, или $\left(4^k + 5\right) \,\vdots\, 3$. Воспользуемся методом математической индукции.

Пусть $n = 1$. $4^1 + 5 = 9 \,\vdots\, 3$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $\left(4^k + 5\right) \,\vdots\, 3.$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$, т. е. $\left(4^{k+1} + 5\right) \,\vdots\, 3.$

$4^{k+1} + 5 = 4 \cdot 4^k + 5 = \underbrace{4^k + 5}_{\vdots\, 3} + \underbrace{3 \cdot 4^k}_{\vdots\, 3}$, значит $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $(4^n + 5) \vdots 3$, что и требовалось доказать.

Теперь вернемся к исходной задаче.

Из доказанного следует, что $3 \cdot (4^n + 5) \vdots 9$.

Ранее для доказательства $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $\left(4^{k+1} + 15(k+1) - 1\right) \vdots 9$ необходимо было доказать, что $3\left(4^k + 5\right) \vdots 9$, что мы и сделали.

Таким образом,

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = \underbrace{\left(4^k + 15k - 1\right)}_{\vdots 9} + \underbrace{3\left(4^k + 5\right)}_{\vdots 9},$$

т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$, что и требовалось доказать.

3. $\dfrac{a_1 + a_n}{2} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — члены арифметической прогрессии, $a_n \geqslant 0$.

Так как a_n — арифметическая прогрессия, то

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, причем

$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = \ldots = a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d$,

т. е. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (см. с. 138, пункт б).

Следовательно, $\dfrac{a_1 + a_n}{2} = \dfrac{S_n}{n}$.

Тогда исходное неравенство приобретает вид

$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, что ранее было доказано в виде теоремы Коши — Буняковского.

4. Найдите формулу суммы и докажите ее верность:

$\dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$, где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — члены геометрической прогрессии.

Положим $f(n) = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$.

Очевидно, что $f(n) = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_1 \cdot q} + \ldots + \dfrac{1}{b_1 \cdot q^{n-1}} =$

$= \dfrac{q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^1 + 1}{b_1 \cdot q^{n-1}} =$

$= \dfrac{b_1\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^1 + 1\right)}{b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1}} = \dfrac{S_n}{b_1 \cdot b_n}$, так как

$b_1\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^1 + 1\right) = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 = S_n$.

Гипотеза сформулирована. Докажем, что она верна.

Пусть $n = 1$, тогда $\mathrm{L} = \dfrac{1}{b_1}$; $\quad \Pi = \dfrac{S_1}{b_1 \cdot b_1} = \dfrac{b_1}{b_1 \cdot b_1} = \dfrac{1}{b_1}$,

значит, $\mathrm{L} = \Pi$ и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $f(k) = \dfrac{S_k}{b_1 \cdot b_k}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $f(k+1) = \dfrac{S_{k+1}}{b_1 \cdot b_{k+1}}$.

$$f(k+1)=f(k)+\frac{1}{b_{k+1}}=\frac{S_k}{b_1\cdot b_k}+\frac{1}{b_{k+1}}=\frac{S_k}{b_1\cdot b_1\cdot q^{k-1}}+\frac{1}{b_1\cdot q^k}=$$

$$=\frac{S_k\cdot q+b_1}{b_1\cdot b_1\cdot q^k}=\frac{\left(b_1+b_1\cdot q+\ldots+b_1\cdot q^{k-1}\right)\cdot q+b_1}{b_1\cdot b_{k+1}}=$$

$$=\frac{b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^k+b_1}{b_1\cdot b_{k+1}}=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{k+1}}{b_1\cdot b_{k+1}}=$$

$=\dfrac{S_{k+1}}{b_1\cdot b_{k+1}}$, значит $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1)$ — И$)$;
2. Из $(\varphi(k)$ — И$)$ следует, что $(\varphi(k+1)$ — И$)$.

Таким образом, для любых $n\in\mathbb{N}$ $(\varphi(n)$ — И$)$,

т. е. $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\ldots+\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{S_n}{b_1\cdot b_n}$,

что и требовалось доказать.

Числа Фибоначчи[1]

Задача. Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата сами уже через два месяца после рождения приносят такой же приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара *новорожденных* кроликов?

Отметим, что по условию задачи через месяц будет еще только одна пара кроликов, а вот через два месяца — уже две пары. Через три месяца приплод даст только первая пара кроликов, и всего будет три пары. Через четыре месяца приплод кроликов будет и от первой пары, и от второй — итого пять пар и так далее.

Положим $\Phi(n)$ — количество пар кроликов через n месяцев с начала года. Очевидно, через $(n+1)$ месяц будет $\Phi(n)$ пар и еще столько пар кроликов, сколько было в конце $(n-1)$ месяца, т. е. еще $\Phi(n-1)$ пар.

Следовательно, выполняется рекуррентное соотношение: $\boxed{\Phi(n+2) = \Phi(n+1) + \Phi(n)}$.

По условию $\Phi(1) = 1$, $\Phi(2) = 1$, тогда $\Phi(3) = 2$, $\Phi(4) = 3$; $\Phi(5) = 5$ и так далее.

Пусть $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, где $a_0 = 1$ и $a_1 = 1$. Последовательность чисел $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, образованная по этому закону, называется рядом Фибоначчи, т. е. $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ — ряд Фибоначчи.

[1] Леонардо Пизанский-Фибоначчи (1180–1250) родился в Пизе в семье известного купца с международными связями. Деловые поездки в Северную Африку дали Леонардо возможность познакомиться с математическими работами мусульманских ученых, в том числе с индо-арабской (десятичной) системой счисления, позаимствованной из Азии. Именно благодаря Фибоначчи западная культура сделала этот прорывной решающий шаг вперед. Формула общего члена последовательности Фибоначчи была обнаружена только в 1843 г. французским математиком Жаком Бине: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Упражнения 2

Докажите свойства ряда Фибоначчи:

1. $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} + 1;$
2. $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n;$
3. $a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1;$
4. $a_{2n+1} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n};$
5. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1};$
6. $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots + a_{2n-1} \cdot a_{2n} = a_{2n}^2.$

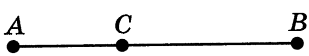
Примечание. Отметим очень важную связь золотого сечения и чисел Фибоначчи.

Напомним определение, данное Евклидом в шестой книге «Начала»: «Разделить прямую линию в крайнем отношении и среднем отношении значит разделить ее на два таких отрезка, чтобы отношение всей линии к большему отрезку равнялось отношению большего отрезка к меньшему».

Выражаясь кратко современным языком: «Целое относится к большей части, как большая часть к меньшей».

В 1509 году Лука Пачоли посвятил трактат золотому сечению и назвал его «О Божественной пропорции».

Рассмотрим произвольный отрезок AB, где $BC > AC$ и $C \in AB$.



Следовательно, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$,

тогда $AB \cdot AC = BC^2$, где $AC = AB - BC$.

Отсюда следует, что $AB(AB - BC) = BC^2$;

$AB^2 - AB \cdot BC - BC^2 = 0 \ (\ : BC^2 \ );$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - \frac{AB}{BC} - 1 = 0; \quad \left(\frac{AB}{BC}\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Положим $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ — значение золотой пропорции. Можно доказать, что $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\Phi}$.

Обозначение Φ введено американским математиком Марком Барром в начале XX века в честь Фидия, гениального архитектора храма Парфенона в Афинах.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((-1)^n \cdot \Phi^n + \frac{1}{\Phi^n}\right)$$

при $n \in \mathbb{N}$.

Можно проверить, что $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$ и так далее, т. е. $\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$.

Решение упражнений 2

Вернемся к упражнению и докажем свойства ряда Фибоначчи.

1. $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} + 1.$

Так как при $n = 0$ из условия примера следует, что $a_2 = a_1 + 1$, то $a_0 = 1$, тогда $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ (см. определение на с. 204).

Пусть $n = 1$.

$\mathrm{L} = a_4 = 5; \quad \Pi = a_1 + a_3 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5,$

значит $\mathrm{L} = \Pi$ и $(\varphi(1) - \text{И})$.

Пусть $(\varphi(k) - \text{И})$, т. е. $a_{2k+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1.$

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - \text{И})$,

т. е. $a_{2k+4} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1.$

По рекуррентному правилу образования ряда Фибоначчи

$a_{2k+4} = a_{2k+3} + a_{2k+2}$, и $a_{2k+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1.$

Следовательно, $a_{2k+4} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1$, и $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;
2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N} \quad (\varphi(n) - \text{И})$,

т. е. $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} + 1,$

что и требовалось доказать.

2. $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n.$

Отметим, что в данном примере последовательность Фибоначчи также начинается с a_0: $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ а закон имеет вид $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$.

Пусть $n = 1$, тогда

$\text{L} = a_1^2 - a_0 \cdot a_2 = 1^2 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1; \quad \Pi = (-1)^1 = -1,$

значит $\text{L} = \Pi$ и $(\varphi(1) -$ И$)$.

Значит $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ и так далее.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1} = (-1)^k$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$ $(a_{k+2} = a_k + a_{k+1})$,

т. е. $a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = (-1)^{k+1}$.

$a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = a_{k+1}^2 - a_k \cdot (a_{k+1} + a_k) = a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+1} - a_k^2 =$

$= a_{k+1} \cdot (a_{k+1} - a_k) - a_k^2 = \qquad (a_{k+1} = a_k + a_{k-1})$

$= a_{k+1} \cdot (a_k + a_{k-1} - a_k) - a_k^2 = a_{k+1} \cdot a_{k-1} - a_k^2 =$

$= -(a_k^2 - a_{k+1} \cdot a_{k-1}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$,

т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$, что и требовалось доказать.

3. $a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1$.

Пусть $n = 1$, тогда

$\text{L} = a_{1+2} = a_3 = 3; \quad \Pi = a_0 + a_1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

(справа $n + 2$ слагаемых — в данном случае три),

следовательно, $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $a_{k+2} = a_0 + a_1 + \ldots + a_k + 1$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $a_{k+3} = a_0 + a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} + 1$.

Так как $a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1}$, где $a_{k+2} = a_0 + \ldots + a_k + 1$,

то $a_{k+3} = a_0 + a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} + 1$, т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1$,

что и требовалось доказать.

4. $a_{2n+1} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$.

Пусть $n = 1$, тогда

$\mathrm{L} = a_3 = 3$; $\quad \Pi = a_0 + a_2 = 1 + 2 = 3$

(в правой части $n+1$ слагаемых, в данном случае два),

следовательно, $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) -$ И$)$, т. е. $a_{2k+1} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}$.

Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) -$ И$)$,

т. е. $a_{2k+3} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + 2_{2k} + a_{2k+2}$.

Так как $a_{2k+3} = a_{2k+2} + a_{2k+1}$, где $a_{2k+1} = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2k}$,

то $a_{2k+3} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k} + a_{2k+2}$, т. е. $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) -$ И$)$;

2. Из $(\varphi(k) -$ И$)$ следует, что $(\varphi(k+1) -$ И$)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) -$ И$)$,

т. е. $a_{2n+1} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$,

что и требовалось доказать.

5. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$

(ряд Фибоначчи имеет вид $a_1, a_2, \ldots$).

Пусть $n = 1$, тогда (см. с. 204)

$\mathrm{L} = a_1^2 = 1^2 = 1$; $\quad \Pi = a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 1 = 1$,

следовательно, $\mathrm{L} = \Pi$, т. е. $(\varphi(1) -$ И$)$.

Пусть $(\varphi(k) - И)$, т.е. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = a_k \cdot a_{k+1}$.
Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - И)$,
т.е. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2 = a_{k+1} \cdot a_{k+2}$.
$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}^2 = a_k \cdot a_{k+1} + \left(a_{k+1}\right)^2 =$
$= a_{k+1} \cdot \left(a_{k+1} + a_k\right) = a_{k+1} \cdot a_{k+2}$,
т.е. $(\varphi(k+1) - И)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - И)$;
2. Из $(\varphi(k) - И)$ следует, что $(\varphi(k+1) - И)$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - И)$,
т.е. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$,
что и требовалось доказать.

6. $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots + a_{2n-1} \cdot a_{2n} = a_{2n}^2$
(ряд Фибоначчи начинается с $a_1, a_2, a_3, \ldots$).

Пусть $n = 1$, тогда
$\mathrm{L} = a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 1 = 1$; $\quad \Pi = a_{2\cdot 1}^2 = a_2^2 = 1^2 = 1$,
следовательно, $\mathrm{L} = \Pi$, значит, $(\varphi(1) - И)$.
Пусть $(\varphi(k) - И)$, т.е. $a_1 \cdot a_2 + \ldots + a_{2k-1} \cdot a_{2k} = a_{2k}^2$.
Докажем, что тогда $(\varphi(k+1) - И)$, т.е.
$a_1 \cdot a_2 + \ldots + a_{2k-1} \cdot a_{2k} + a_{2k} \cdot a_{2k+1} + a_{2k+1} \cdot a_{2(k+1)} = a_{2(k+1)}^2$.
Так как $S_{k+1} = S_k + a_{2k} \cdot a_{2k+1} + a_{2k+1} \cdot a_{2(k+1)}$,
то $S_{k+1} = a_{2k}^2 + a_{2k} \cdot a_{2k+1} + a_{2k+1} \cdot a_{2(k+1)}$.
Но $\underline{a_{2k}^2} + \underline{a_{2k} \cdot a_{2k+1}} + a_{2k+1} \cdot a_{2(k+1)} =$
$= a_{2k}\left(a_{2k} + a_{2k+1}\right) + a_{2k+1} \cdot a_{2(k+1)} =$
$= a_{2k} \cdot a_{2(k+1)} + a_{2k+1} \cdot a_{2(k+1)} = a_{2(k+1)} \cdot \left(a_{2k} + a_{2k+1}\right) = a_{2(k+1)}^2$,
т.е. $S_{k+1} = a_{2(k+1)}^2$ и $(\varphi(k+1) - И)$.

Итак, мы доказали, что

1. $(\varphi(1) - \text{И})$;

2. Из $(\varphi(k) - \text{И})$ следует, что $(\varphi(k+1) - \text{И})$.

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $(\varphi(n) - \text{И})$,
т. е. $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots + a_{2n-1} \cdot a_{2n} = a_{2n}^2$,
что и требовалось доказать.

Примечание. Отметим, что в данном равенстве число слагаемых в левой его части равно $2n-1$. Когда n возрастает на *единицу*, то число слагаемых в левой части увеличивается на *два*: появляются новые слагаемые $a_{2n} \cdot a_{2n+1}$ и $a_{2n+1} \cdot a_{2(n+1)}$.

Самостоятельная работа 2

Докажите методом математической индукции утверждения:

1. $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$;

2. $2^2+3^2+\ldots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$;

3. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$;

4. $b_2+b_4+b_6+\ldots+b_{2n}=\dfrac{q}{1+q}\cdot S_{2n}$,

где b_n — геометрическая прогрессия;

5. $\left(10^n+10^{n-1}+\ldots+1\right)\cdot\left(10^{n+1}+5\right)+1=\left(\dfrac{10^{n+1}-2}{3}\right)^2$;

6. $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}=\dfrac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}$,

где $a_n>0$ для любого $n\in\mathbb{N}$;

7. $\dfrac{n+1}{a_1\cdot a_{2n+2}}<\dfrac{1}{a_1\cdot a_2}+\dfrac{1}{a_3\cdot a_4}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2n}\cdot a_{2n+1}}<\dfrac{n+1}{a_1\cdot a_{2n+1}}$,

где a_n — арифметическая прогрессия, $d>0$ и $a_1>0$.

8. $\left(1+2+2^2+\ldots+2^{5n-1}\right)\vdots\ 31$;

9. $\left(1+3+3^2+\ldots+3^{6n-1}\right)\vdots\ 364$;

10. $\dfrac{x_1^4+x_2^4+\ldots+x_4^4}{n}\geqslant x_1\cdot x_2+\ldots+x_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$,

где $x_n\geqslant 0$.

Найдите закономерность суммирования и докажите ее верность:

11. $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{13}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$;

12. $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{33}{8}+\ldots+\frac{2^{2n-1}+1}{2^n}$;

13. $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\ldots.$

Докажите верность равенства:

14. $\sin\frac{\pi}{4n}\cdot\sin\frac{3\pi}{4n}\cdot\sin\frac{5\pi}{4n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}$;

15. $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^n x=\frac{1}{2^{n+1}}.$

3

Введение в криптографию

Сравнение по модулю

Делимость. Сравнение по модулю

<u>Определение</u>. Говорят, что число a делится на число b с остатком, если число a можно представить в виде $a = bq + r$, где a — делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток ($0 \leqslant q < b$).
Если $r = 0$, т. е. остаток равен нулю, то $a = bq$. Этот факт записывается так: $a \,\vdots\, b$.

Рассмотрим ряд примеров на деление с остатком.

1. Поделим 35 на 3.

$$\begin{array}{r|l} -\,35 & 3 \\ \underline{3} & 11 \\ -\,5 & \\ \underline{3} & \\ 2 & \end{array}$$

— этот факт можно записать иначе:
$35 = \mathbf{3} \cdot 11 + \mathbf{2}$, где 35 — делимое, 3 — делитель, 11 — частное (неполное), **2** — остаток.

$$\begin{array}{r|l} -\,29 & 3 \\ \underline{27} & 9 \\ 2 & \end{array}$$

— значит, $29 = \mathbf{3} \cdot 9 + \mathbf{2}$,
где **2** — остаток от деления.

2. Поделим 41 на 5.

$$\begin{array}{r|l} -\,41 & 5 \\ \underline{40} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

— значит, $41 = \mathbf{5} \cdot 8 + \mathbf{1}$,
где **1** — остаток от деления.

$$\begin{array}{r|l} -\,36 & 5 \\ \underline{35} & 7 \\ 1 & \end{array}$$

— значит, $36 = \mathbf{5} \cdot 7 + \mathbf{1}$,
где **1** — остаток от деления.

3. Поделим 17 на 7.

$$-\begin{array}{r|l} 17 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 3 & \end{array}$$ — значит, $17 = \mathbf{7} \cdot 2 + \mathbf{3}$, где **3** — остаток от деления.

$$-\begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ \underline{28} & 4 \\ 3 & \end{array}$$ — значит, $31 = \mathbf{7} \cdot 4 + \mathbf{3}$, где **3** — остаток от деления.

4. Поделим 44 на 8.

$$-\begin{array}{r|l} 44 & 8 \\ \underline{40} & 5 \\ 4 & \end{array}$$ — значит, $44 = \mathbf{8} \cdot 5 + \mathbf{4}$, где **4** — остаток от деления.

$$-\begin{array}{r|l} 28 & 8 \\ \underline{24} & 3 \\ 4 & \end{array}$$ — значит, т. е. $28 = \mathbf{8} \cdot 3 + \mathbf{4}$, где **4** — остаток от деления.

Итак, приведены примеры двух *различных* чисел, при делении которых на *одно и то же* число *остатки* от деления будут *равными*. В связи с данными примерами можно сформулировать определение, выделяющее такие пары чисел.

<u>Определение.</u> Если два целых числа a и b при делении на натуральное число m дают один и тот же остаток r, где $0 \leqslant r < m$, то числа a и b называются сравнимыми по модулю m. Записывается это так: $a \equiv b \pmod{m}$, при этом читается это так — число a сравнимо с числом b по модулю m.

По определению, предыдущие примеры на деление с остатком можно записать: $35 \equiv 29 \pmod 3$; $41 \equiv 36 \pmod 5$; $17 \equiv 31 \pmod 7$; $28 \equiv 44 \pmod 8$.

Примечание

а) Отметим, что $a \equiv a \pmod{m}$, так как $(a - a) \,\vdots\, m$. Значит сравнение чисел по модулю m обладает свойством *рефлексивности*.

б) Очевидно, что из определения сравнения чисел по модулю m следует, что если $a \equiv b \pmod{m}$, то и $b \equiv a \pmod{m}$. Значит сравнение чисел по модулю обладает свойством *симметричности*.

Теорема 1. Для того чтобы числа a и b были сравнимы по модулю m, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$, необходимо и достаточно, чтобы $a = b + m \cdot t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Докажем теорему 1.

Необходимость

Если $a \equiv b \pmod{m}$, то по определению сравнимости чисел a и b по модулю m при делении на число m они имеют один и тот же остаток, т. е. $\begin{cases} a = m \cdot q + r \\ b = m \cdot q_1 + r \end{cases}$, где $0 \leqslant r < m$; $q, q_1 \in \mathbb{Z}$, тогда $a - b = m(q - q_1)$. Полагая $q - q_1 = t$, где $t \in \mathbb{Z}$, получим $a - b = m \cdot t$, т. е. $a = b + m \cdot t$, что и следовало доказать.

Достаточность

Если $a = b + m \cdot t$, где $t \in \mathbb{Z}$, то так как b можно представить в виде $b = mg_1 + r$, то $a = b + mt =$ $= \underline{mq_1} + r + \underline{mt} = m(q_1 + t) + r = mq + r$, где $q = q_1 + t$.

Значит, числа a и b при делении на m дают один и тот же остаток r, следовательно, по определению $a \equiv b \pmod{m}$, что и следовало доказать.

Теорема 2. Для того чтобы числа a и b были сравнимы по модулю m, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$, необходимо и достаточно, чтобы $(a - b) \,\vdots\, m$ (разность чисел должна быть кратна числу m).

Докажем теорему 2.

Необходимость

Так как ранее было доказано, что из $a \equiv b \pmod{m}$ следует, что $a = b + m \cdot t$, то $a - b = m \cdot t$, т. е. $(a - b) \,\vdots\, m$, что и следовало доказать.

Достаточность

Если $(a - b) \,\vdots\, m$, то это значит, что $a - b = m \cdot t$,
т. е. $a = b + m \cdot t$, следовательно, по доказанному ранее
$a \equiv b \pmod{m}$, что и следовало доказать.

Примеры

1. По теореме **1** $-17 \equiv 3 \pmod{5}$, так как $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$.
2. По теореме **2** $-4 \equiv -10 \pmod{3}$,
   так как $-4 - (-10) = -4 + 10 = 6 \,\vdots\, 3$.

Свойства сравнений

1. $7 \equiv 11 \pmod 4$ — это верно,

так как по определению $\begin{cases} 7 = 4 \cdot 1 + \mathbf{3} \\ 11 = 4 \cdot 2 + \mathbf{3} \end{cases}$;

$19 \equiv 11 \pmod 4$ — это верно,

так как по определению $\begin{cases} 19 = 4 \cdot 4 + \mathbf{3} \\ 11 = 4 \cdot 2 + \mathbf{3} \end{cases}$,

значит $7 \equiv 19 \pmod 4$.

Похоже, что это какое-то свойство сравнений чисел по величине остатка при делении. Сформулируем его и попытаемся это доказать.

> **Свойство сравнений ①. Два числа, сравнимые с третьим числом по одному и тому же модулю, сравнимы между собой, т. е. если $\boldsymbol{a \equiv b \pmod m}$ и $\boldsymbol{c \equiv b \pmod m}$, то $\boldsymbol{a \equiv c \pmod m}$.**

Докажем это свойство.

Если $\begin{cases} a \equiv b \pmod m \\ c \equiv b \pmod m \end{cases}$, то по теореме **1** $\begin{cases} a = b + mt \\ c = b + mt_1 \end{cases}$.

Почленно вычтем, получим $a - c = mt - mt_1 = m(t - t_1)$,

значит $(a - c) \vdots m$, следовательно, по теореме **2**

$a \equiv c \pmod m$, что и следовало доказать.

Примечание. Это свойство можно сформулировать несколько иначе: если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$. Тогда это просто свойство транзитивности сравнений.

2.

> **Свойство сравнений ②. Сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать, получится верное сравнение,**
> **т. е. если $\boldsymbol{a \equiv b \pmod m}$ и $\boldsymbol{a_1 \equiv b_1 \pmod m}$,**
> **то $\boldsymbol{a + a_1 \equiv b + b_1 \pmod m}$.**

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие содержание и использование свойства сравнений ②.

Примеры

а) Пусть $\begin{matrix} 8 \equiv 5 \pmod 3 \\ 13 \equiv 10 \pmod 3 \end{matrix}$, тогда по свойству сравнений ②

$8 + 13 \equiv 5 + 10 \pmod 3$, т. е. $21 \equiv 15 \pmod 3$.

По теореме **2** это верно, так как $(21 - 15) \vdots 3$.

б) Пусть $\begin{matrix} 22 \equiv 13 \pmod 9, \text{ где } r_1 = 4; \\ 10 \equiv 19 \pmod 9, \text{ где } r_2 = 1; \\ 11 \equiv 20 \pmod 9, \text{ где } r_3 = 2, \end{matrix}$

тогда по свойству сравнений ②

$22 + 10 + 11 \equiv 13 + 19 + 20 \pmod 9$,

значит $43 \equiv 52 \pmod 9$, где $r_4 = 7$,

так как $43 = 9 \cdot 4 + 7$ и $52 = 9 \cdot 5 + 7$.

Обратите внимание на то, что суммы остатков трех сравнений равны остатку полученной суммы сравнений (с точностью до модуля).

Действительно, $7 = 4 + 1 + 2$, т. е. $r_4 = r_1 + r_2 + r_3$. Любопытное наблюдение. Попытайтесь самостоятельно доказать или опровергнуть выводы из него.

Докажем свойство сравнений ②.

Пусть $\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod m \\ a_2 \equiv b_2 \pmod m \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a_1 = b_1 + m \cdot t_1 \\ a_2 = b_2 + m \cdot t_2 \end{cases}$.

Следовательно,

$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(t_1 + t_2)$,

значит $(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = m \cdot t$, где $t = t_1 + t_2$.

Тогда по доказанным теоремам **1** и **2** о необходимых и достаточных условиях сравнимости чисел a и b $a_1 + a_2 \equiv \equiv b_1 + b_2 \pmod m$, что и следовало доказать.

Для доказательства теоремы для n слагаемых требуется применение метода математической индукции.

<u>Следствие А</u> из свойства сравнений ②. Любое слагаемое одной части сравнения можно перенести с противоположным знаком в другую часть сравнения, получится верное сравнение, т. е. если $a+b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c-b \pmod{m}$.

Пусть $a+b \equiv c \pmod{m}$ и $-b \equiv -b \pmod{m}$,
тогда по свойству сравнений ② $a+b+(-b) \equiv c-b \pmod{m}$,
значит $a \equiv c-b \pmod{m}$, что и требовалось доказать.

Напомним, что сравнивать можно любые целые числа, т. е. числа a и b могут быть разных знаков.

Примеры

а) $-5 \equiv 7 \pmod{4}$, так как $\begin{aligned} -5 &= 4\cdot(-2)+3 \\ 7 &= 4\cdot 1+3 \end{aligned}$.

Докажем иначе, используя следствие А из свойства ②, получим: $0 \equiv 7+5 \pmod{4}$, т. е. $0 \equiv 12 \pmod{4}$, что верно по теореме **2**, так как $(12-0) \vdots 4$.

б) $-9 \equiv -14 \pmod{5}$, что верно по определению сравнения, так как $\begin{aligned} -9 &= 5\cdot(-2)+1 \\ -14 &= 5\cdot(-3)+1 \end{aligned}$.

С другой стороны, используя следствие А из свойства ②, получим: $14-9 \equiv 0 \pmod{5}$, т. е. $5 \equiv 0 \pmod{5}$, что и требовалось доказать.

в) $\begin{aligned} 7+3 &\equiv 4 \pmod{6} \\ -3 &\equiv -3 \pmod{6} \end{aligned}$, тогда $7 \equiv 1 \pmod{6}$, так как по теореме **2** $(7-1) \vdots 6$, что верно.

г) $\begin{aligned} 14-9 &\equiv 9 \pmod{4} \\ 9 &\equiv 9 \pmod{4} \end{aligned}$, тогда $14 \equiv 18 \pmod{4}$,

т. е. слагаемое может быть любого знака.

<u>Следствие В</u> из свойства сравнений ②. К любой части сравнения можно прибавить любое число, кратное модулю сравнения, получится верное сравнение, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a+m\cdot k \equiv b \pmod{m}$.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$ и $mk \equiv 0 \pmod{m}$,
тогда $a+mk \equiv b \pmod{m}$, что и следовало доказать.

3. Ранее было доказано, что сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать. Интересно, а можно ли их перемножать? Посмотрим.

Пусть $7 \equiv 11 \pmod 4$ и $15 \equiv 3 \pmod 4$,

тогда $7 \cdot 15 \equiv 11 \cdot 3 \pmod 4$, т. е. $105 \equiv 33 \pmod 4$, что верно, так как $(105 - 33) \,\vdots\, 4$.

Свойство сравнений ③. Сравнения по одному и тому же модулю можно почленно перемножать, получится верное сравнение, т. е. если $a_1 \equiv b_1 \pmod m$ и $a_2 \equiv b_2 \pmod m$, то $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod m$.

Докажем это.

Пусть $\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod m \\ a_2 \equiv b_2 \pmod m \end{cases}$, тогда $\begin{cases} a_1 = b_1 + mt_1 \\ a_2 = b_2 + mt_2 \end{cases}$.

Перемножим почленно левые и правые части равенств, получим:

$$a_1 \cdot a_2 = (b_1 + mt_1)(b_2 + mt_2) = b_1 \cdot b_2 + m(b_1 \cdot t_2 + b_2 \cdot t_1 + m \cdot t_1 \cdot t_2) =$$

$$= b_1 \cdot b_2 + m \cdot t, \text{ где } t = b_1 \cdot t_2 + b_2 \cdot t_1 + m \cdot t_1 \cdot t_2,$$

т. е. $a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 + m \cdot t$. Значит $(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \,\vdots\, m$.

Следовательно, по теореме **2** $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod m$, что и следовало доказать.

<u>Следствие А</u> из свойства сравнений ③. Обе части сравнения можно возвести в одну и ту же натуральную степень, получится верное сравнение.
Значит, если $a \equiv b \pmod m$, то $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Например, $\begin{cases} 7 \equiv 13 \pmod 3 \\ 7 \equiv 13 \pmod 3 \end{cases}$, тогда $7^2 \equiv 13^2 \pmod 3$,

т. е. $49 \equiv 169 \pmod 3$, что верно, так как $\begin{cases} 49 = 3 \cdot 16 + 1 \\ 169 = 3 \cdot 56 + 1 \end{cases}$

или $169 - 49 = 120 \,\vdots\, 3$ по теореме **2**.

Докажем следствие А из свойства сравнений ③.

Действительно, пусть $a \equiv b \pmod m$, тогда $\begin{matrix} a \equiv b \pmod m \\ a \equiv b \pmod m \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a \equiv b \pmod m \end{matrix}$.

Перемножим все n сравнений, тогда $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Разумеется, строгое доказательство этого утверждения проводится методом математической индукции (см. главу 2).

Рассмотрим несколько примеров на применение этого замечательного следствия.

а) Докажите, что $(7^n - 1) \vdots 3$.

Так как $7 \equiv 1 \pmod 3$, то $7^n \equiv 1^n \pmod 3$, тогда $7^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$, значит, по теореме **2** $(7^n - 1) \vdots 3$, что и следовало доказать.

б) Докажите, что $(13^n - 1) \vdots 6$.

Так как $13 \equiv 1 \pmod 6$, то $13^n \equiv 1^n \pmod 6$, значит $13^n - 1 \equiv 0 \pmod 6$, значит, по теореме **2** $(13^n - 1) \vdots 6$, что и следовало доказать.

Следствие В из свойства сравнений ③. Обе части сравнения можно умножить на одно и то же целое число, получится верное сравнение, т. е. если $\boldsymbol{a \equiv b \pmod m}$, то $\boldsymbol{a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod m}$.

Действительно, пусть $\begin{cases} a \equiv b \pmod m \\ k \equiv k \pmod m \end{cases}$,

тогда $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod m$.

Пример. $6 \equiv 11 \pmod 5$, тогда $60 \equiv 110 \pmod 5$, что верно, хотя остатки у исходного сравнения равны 1, а у полученного сравнения равны 0.

4. **Свойство сравнений ④. Обе части сравнения можно разделить на их общий делитель, если этот делитель и модуль взаимно простые числа. Тогда полученное сравнение верно, т. е. если $\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}$, $\boldsymbol{a = a_1 \cdot d}$; $\boldsymbol{b = b_1 \cdot d}$ и $\boldsymbol{(m, d) = 1}$, то $\boldsymbol{a_1 \equiv b_1 \pmod{m}}$.**

Напомним, что запись вида $(m, d) = 1$ означает, что числа m и d — взаимно простые числа.

Докажем свойство сравнений ④.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, где $a = a_1 \cdot d$, $b \equiv b_1 \cdot d$ и $(m; d) = 1$,

тогда $a - b = (a_1 - b_1)d$. Но $(a - b) \vdots m$,

тогда $(a_1 - b_1) \cdot d \vdots m$, т. е. $(a_1 - b_1) \vdots m$,

так как $(d; m) = 1$ (т. е. $d \not\vdots\, m$),

следовательно, $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, что и следовало доказать.

Примеры

а) Если $105 \equiv 33 \pmod{4}$, то $35 \equiv 11 \pmod{4}$, так как $(3, 4) = 1$.

Здесь $m > d$ ($m = 4$, $d = 3$), где m — модуль сравнения, d — общий делитель чисел $a = 105$ и $b = 33$.

б) $105 \equiv 45 \pmod{4}$, так как $(15; 4) = 1$, т. е. $15 \not\vdots\, 4$.

Тогда можно разделить обе части сравнения на 15, значит $7 \equiv 3 \pmod{4}$ (здесь $m = 4$, $d = 15$, $d > m$).

в) Рассмотрим типичную ошибку использования свойства ④. $105 \equiv 21 \pmod{12}$, но $35 \equiv 7 \pmod{12}$ — ложь, так как $(35 - 7) \not\vdots\, 12$.

Это связано с тем, что $12 \vdots 3$, а это противоречит условию данного свойства, т. е. $(12; 3) \neq 1$.

Упражнения 3

Можно ли, используя только свойства сравнений (не используя определение сравнения по модулю), доказать следующие утверждения?

1. Если $34 \equiv 16 \pmod 3$ и $16 \equiv 14 \pmod 3$, то $34 \equiv 14 \pmod 3$.

2. Если $17 \equiv 13 \pmod 4$ и $21 \equiv 13 \pmod 4$, то $17 \equiv 21 \pmod 4$.

3. Если $37 \equiv 16 \pmod 7$ и $29 \equiv 15 \pmod 7$, то $66 \equiv 31 \pmod 7$.

4. Если $\begin{cases} 32 \equiv 20 \pmod 6 \\ 9 \equiv 27 \pmod 6 \\ 41 \equiv 35 \pmod 6 \\ 10 \equiv 16 \pmod 6 \end{cases}$, то $92 \equiv 98 \pmod 6$.

5. Если $-7 \equiv 5 \pmod 4$, то $17 \equiv -23 \pmod 4$.

6. Если $19 \equiv 10 \pmod 9$ и $23 \equiv 50 \pmod 9$, то $437 \equiv 500 \pmod 9$.

7. Если $34 \equiv 9 \pmod 5$, то $544 \equiv 144 \pmod 5$.

8. Если $18 \equiv 33 \pmod{15}$, то $6 \equiv 11 \pmod{15}$.

Докажите:

9. $(15^5 - 1) \,\vdots\, 7$.

10. $(27^7 - 12^7) \,\vdots\, 13$.

Решение упражнений 3

Можно ли, используя только свойства сравнений (не используя определение сравнения по модулю), доказать следующие утверждения?

1. Если $34 \equiv 16 \pmod 3$ и $16 \equiv 14 \pmod 3$, то $34 \equiv 14 \pmod 3$.

Для $16 \equiv 14 \pmod 3$ не выполняется условие теоремы **2**, так как $(16 - 14) \vdots 3$ — ложь.

Значит $16 \not\equiv 14 \pmod 3$. Следовательно, условие свойства сравнений (1) не выполняется, а значит, свойством сравнений (1) воспользоваться нельзя.

Ответ: нет.

2. Если $17 \equiv 13 \pmod 4$ и $21 \equiv 13 \pmod 4$, то $17 \equiv 21 \pmod 4$.

$17 \equiv 13 \pmod 4$, так как по теореме **2** $(17 - 13) \vdots 4$.

$21 \equiv 13 \pmod 4$, так как по теореме **2** $(21 - 13) \vdots 4$.

Значит, свойством сравнений (1) воспользоваться можно.

Ответ: да.

3. Если $37 \equiv 16 \pmod 7$ и $29 \equiv 15 \pmod 7$, то $66 \equiv 31 \pmod 7$.

$(37 - 16) \vdots 7$, тогда $37 \equiv 16 \pmod 7$ — верно;

$(29 - 15) \vdots 7$, тогда $29 \equiv 15 \pmod 7$ — верно;

$(66 - 31) \vdots 7$, тогда $66 \equiv 31 \pmod 7$ — верно.

Значит, использование свойства сравнений (2) верно.

Ответ: да.

4. Если $\begin{cases} 32 \equiv 20 \pmod 6 \\ 9 \equiv 27 \pmod 6 \\ 41 \equiv 35 \pmod 6 \\ 10 \equiv 16 \pmod 6 \end{cases}$, то $92 \equiv 98 \pmod 6$.

$\begin{cases} 32 = \mathbf{6} \cdot 5 + \mathbf{2} \\ 20 = \mathbf{6} \cdot 3 + \mathbf{2} \end{cases}$, значит $32 \equiv 20 \pmod 6$ — верно.

$\begin{cases} 9 = \mathbf{6} \cdot 1 + \mathbf{3} \\ 27 = \mathbf{6} \cdot 4 + \mathbf{3} \end{cases}$, значит $9 \equiv 27 \pmod 6$ — верно.

$\begin{cases} 41 = \mathbf{6} \cdot 6 + \mathbf{5} \\ 35 = \mathbf{6} \cdot 5 + \mathbf{5} \end{cases}$, значит $41 \equiv 35 \pmod 6$ — верно.

$\begin{cases} 10 = \mathbf{6} \cdot 1 + \mathbf{4} \\ 16 = \mathbf{6} \cdot 2 + \mathbf{4} \end{cases}$, значит $10 \equiv 16 \pmod 6$ — верно.

Тогда по свойству сравнений 2

$32+9+41+10=20+27+35+16 \pmod 6$, т. е. $92 \equiv 98 \pmod 6$,

где $\begin{cases} 92 = \mathbf{6} \cdot 15 + \mathbf{2} \\ 98 = \mathbf{6} \cdot 16 + \mathbf{2} \end{cases}$.

Значит, использование свойства сравнений 2 верно.

Отметим также, что сумма остатков сравнений равна остатку суммы сравнений с точностью до модуля сравнений: $2 + 3 + 5 + 4 = 14$ и $14 \equiv 2 \pmod 6$.

Ответ: да.

5. Если $-7 \equiv 5 \pmod 4$, то $17 \equiv -23 \pmod 4$.

а) В этом пункте выясним условие равенства левых частей двух исходных сравнений.

$-7 \equiv 5 \pmod 4$ — верно, так как $5 - (-7) = 12 \,\vdots\, 4$.

Тогда по следствию В свойства сравнений 2

$-7 + 4t \equiv 5 \pmod 4$.

Выясним, при каких значениях t $\quad -7 + 4t = 17$.

Очевидно, при $t = 6$. Тогда $17 \equiv 5 \pmod 4$.

б) В этом пункте выясним условие равенства правых частей двух исходных сравнений.

$17 \equiv -23 \pmod 4$ — верно, так как $(17 + 23) \,\vdots\, 4$.

С другой стороны, так как $5 + 4k \equiv -23 \pmod 4$, то

$-23 = 5 + 4k$ по следствию В свойства сравнений 2.

Это выполняется. Очевидно, что $4k = -23 - 5$, где $k = -7$.

Следовательно, нашлись такие $t = 6$ и $k = -7$, что из $-7 \equiv 5 \pmod 4$ следует $-7 + 4 \cdot 6 \equiv 5 + 4 \cdot (-7) \pmod 4$, т. е. $17 \equiv -23 \pmod 4$, что и требовалось доказать.

Отметим, что $-7 \equiv 5 \pmod 4$ и $17 \equiv -23 \pmod 4$ — верные сравнения. Но никаких самих по себе следствий из верности одного сравнения к верности другого сравнения не происходит. Только использование следствия В свойства сравнения (2) приводит к пониманию и доказательству причинно-следственных отношений между этими сравнениями.

Ответ: да.

6. Если $19 \equiv 10 \pmod 9$ и $23 \equiv 50 \pmod 9$, то $437 \equiv 500 \pmod 9$.

а) Так как $19 = 9 \cdot 2 + 1$ и $10 = 9 \cdot 1 + 1$, то $19 \equiv 10 \pmod 9$ — верно.

б) Так как $23 = 9 \cdot 2 + 5$ и $50 = 9 \cdot 5 + 5$, то $23 \equiv 50 \pmod 9$ — верно.

в) Так как $437 = 9 \cdot 48 + 5$ и $500 = 9 \cdot 55 + 5$, то $437 \equiv 500 \pmod 9$ — верно.

Можно проще: $(500 - 437) \,\vdots\, 9$; $63 \,\vdots\, 9$ по теореме **2**, значит $437 \equiv 500 \pmod 9$.

А если учесть, что $437 = 23 \cdot 19$, то применимо свойство (3), что и требовалось доказать.

Ответ: да.

7. Если $34 \equiv 9 \pmod 5$, то $544 \equiv 144 \pmod 5$.

а) Так как $34 = 5 \cdot 6 + 4$ и $9 = 5 \cdot 1 + 4$, то $34 \equiv 9 \pmod 5$ — верно.

б) Так как $544 - 144 = 400 \,\vdots\, 5$, то по теореме **2** $544 \equiv 144 \pmod 5$ — верно.

в) Учитывая, что $544 = 34 \cdot 16$ и $144 = 9 \cdot 16$, делаем вывод: применение следствия В свойства ③ верно.

Ответ: да.

8. Если $18 \equiv 33 \pmod{15}$, то $6 \equiv 11 \pmod{15}$.

а) Так как $18 = 15 \cdot 1 + 3$ и $33 = 15 \cdot 2 + 3$, то $18 \equiv 33 \pmod{15}$ — верно.

б) Так как $6 = 15 \cdot t + 11$, то $-5 = 15t$, $t = -\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, т. е. $6 \equiv 11 \pmod{15}$ — ложь.

в) Учитывая, что $18 = 6 \cdot 3$ и $33 = 11 \cdot 3$, а $(3, 15) \neq 1$, свойство сравнения ④ не может быть применимо, так как его условие нарушается.

Ответ: нет.

Докажите:

9. $(15^5 - 1) \mathrel{\vdots} 7$.

Так как $15 \equiv 1 \pmod 7$, то $15^5 \equiv 1^5 \pmod 7$ по следствию А из свойства ②.

Тогда $15^5 - 1 \equiv 0 \pmod 7$, значит, $(15^5 - 1) \mathrel{\vdots} 7$.

10. $(27^7 - 12^7) \mathrel{\vdots} 13$.

Так как $\begin{array}{l} 27 \equiv 1 \pmod{13} \\ 12 \equiv -1 \pmod{13} \end{array}$, то $\begin{array}{l} 27^7 \equiv 1^7 \pmod{13} \\ 12^7 \equiv (-1)^7 \pmod{13} \end{array}$.

Тогда по свойству ② $27^7 + 12^7 \equiv 1 + (-1)^7 \pmod{13}$, т. е. $27^7 + 12^7 \equiv 0 \pmod{13}$, значит, $(27^7 + 12^7) \mathrel{\vdots} 13$, что и требовалось доказать.

Свойства сравнений (продолжение)

5. **Свойство сравнений ⑤. Обе части сравнения и модуль можно умножить на одно и то же число, не равное нулю, получится верное сравнение, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a \cdot k \equiv b \cdot k \pmod{m \cdot k}$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $k \neq 0$.**

Докажем это. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a = b + mt$. Умножим обе части равенства на целое число k ($k \neq 0$),

тогда $ak = bk + mkt$, т. е. $ak = bk + (m \cdot k)t$.

Следовательно, $ak \equiv bk \pmod{mk}$, что и следовало доказать.

Пример. $3 \equiv 5 \pmod{2}$, тогда $9 \equiv 15 \pmod{6}$, что верно по теореме **2**: $(15 - 9) \;\vdots\; 6$.

6. **Свойство сравнений ⑥. Обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий множитель, получится верное сравнение, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$ и $a = a_1 \cdot d$; $b = b_1 \cdot d$; $m = m_1 \cdot d$, то $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$.**

Докажем это свойство.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, где $a = a_1 \cdot d$; $b = b_1 \cdot d$; $m = m_1 \cdot d$.

Тогда $a = b + mt$, т. е. $a_1 \cdot d = b_1 \cdot d + m_1 \cdot t \cdot d$; $a_1 = b_1 + m_1 t$.

Значит $a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}$, что и следовало доказать.

Примеры

$18 \equiv 26 \pmod{4}$, тогда $9 \equiv 13 \pmod{2}$;

$27 \equiv 33 \pmod{6}$, тогда $9 \equiv 11 \pmod{2}$;

$30 \equiv 45 \pmod{15}$, тогда $6 \equiv 9 \pmod{3}$;

$36 \equiv 66 \pmod{30}$, тогда $6 \equiv 11 \pmod{5}$.

7. **Свойство сравнений ⑦. Если сравнение имеет место по нескольким модулям, то оно имеет место по модулю, равному наименьшему общему кратному этих модулей, т. е. если** $\begin{matrix} a \equiv b \pmod{m_1} \\ a \equiv b \pmod{m_2} \\ \ldots\ldots \\ a \equiv b \pmod{m_k}, \end{matrix}$ **то** $a \equiv b \pmod{m}$**,**
где $m = \text{НОК}\,(m_1, m_2, \ldots, m_k)$**.**
НОК — обозначение наименьшего общего кратного.

Докажем это.

Пусть $\begin{matrix} a \equiv b \pmod{m_1} \\ a \equiv b \pmod{m_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \equiv b \pmod{m_k} \end{matrix}$. Тогда $\begin{matrix} (a-b) \,\vdots\, m_1 \\ (a-b) \,\vdots\, m_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ (a-b) \,\vdots\, m_k. \end{matrix}$

Следовательно, $(a - b)$ делится на
$\text{НОК}\,(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k) = m$, значит $a \equiv b \pmod{m}$, что и следовало доказать.

Пример

$41 \equiv 71 \pmod{2}$
$41 \equiv 71 \pmod{3}$
$41 \equiv 71 \pmod{6}$
$41 \equiv 71 \pmod{5}$,

следовательно, так как $\text{НОК}(2, 3, 6, 5) = 30$,

то $41 \equiv 71 \pmod{30}$, что и следовало доказать.

8. **Свойство сравнений ⑧. Если сравнение имеет место по модулю** m**, то оно имеет место по любому модулю** d**, являющемуся делителем числа** m**, т. е. если** $a \equiv b \pmod{m}$ **и** $m \,\vdots\, d$**, то** $a \equiv b \pmod{d}$**.**

Приведем доказательство.

$a \equiv b \pmod{m}$, тогда $(a - b) \,\vdots\, m$, но $m = m_1 \cdot d$.

Следовательно, $(a - b) \,\vdots\, d$, а значит $a \equiv b \pmod{d}$, что и следовало доказать.

Пример. $31 \equiv 46 \pmod{15}$, тогда по данному свойству $31 \equiv 46 \pmod{5}$, что верно, так как $15 \,\vdots\, 5$.

9. **Свойство сравнений ⑨. Если одна часть сравнения и модуль делятся на какое-нибудь целое число, то и другая часть сравнения должна делится на это число, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$, где $a \vdots k$ и $m \vdots k$, то $b \vdots k$.**

Приведем доказательство.

$a \equiv b \pmod{m}$, тогда $a = b + mt$.

Пусть $a \vdots k$, где $a = k \cdot a_1$, и $m \vdots k$, где $m = k \cdot m_1$,

тогда $k \cdot a_1 = b + k \cdot m_1 \cdot t$,

т. е. $b = k \cdot a_1 - k \cdot (m_1 \cdot t) = k \cdot (a_1 - m_1 \cdot t)$.

Значит $b \vdots k$, что и следовало доказать.

Пример. $65 \equiv 1586 \pmod{39}$ — это верное сравнение, так как по теореме **2** $(1586 - 65) \vdots 39$.

Действительно, $1586 - 65 = 1521 = 39^2 \vdots 39$.

С другой стороны, по свойству сравнения ⑨ $65 \vdots 13$ и $39 \vdots 13$, значит, $1586 \vdots 13$.

Действительно, $1586 = 13 \cdot 122$, тогда из $65 \equiv 1586 \pmod{39}$ по свойству сравнения ⑨ следует, что $5 \equiv 122 \pmod{3}$.

Упражнения 4

1. Что означает:

а) $a \equiv b \pmod 0$; б) $a \equiv 0 \pmod m$; в) $a \equiv b \pmod 1$?

2. При каких значениях a $a \equiv a \pmod m$?

3. Верно ли утверждение:

если $a \equiv b \pmod m$, то НОД(a, m) = НОД(b, m), где НОД — наибольший общий делитель?

4. Верно ли, что если $a \cdot b \equiv 0 \pmod m$, то или $a \equiv 0 \pmod m$, или $b \equiv 0 \pmod m$?

5. Верно ли, что если $a \cdot b \equiv 0 \pmod p$, где p — простое число, то или $a \equiv 0 \pmod p$, или $b \equiv 0 \pmod p$?

6. Верно ли, что если $a \equiv b \pmod m$ и $a \,\vdots\, m$, то и $b \,\vdots\, m$?

7. Приведите несколько целых значений a, при которых сравнение $2a \equiv 5 \pmod 3$ верно.

8. Найдите остаток от деления 6^{14} на 17.

Решение упражнений 4

1. Что означает:

а) $a \equiv b \pmod 0$.

Увы, ничего, так как $\underline{m > 0}$ по определению, а в данном случае $m = 0$.

б) $a \equiv 0 \pmod m$.

Так как в этом случае $a \vdots m$,

то число a кратно числу m.

в) $a \equiv b \pmod 1$.

Значит $(a - b) \vdots 1$, что верно для любых

значений a и b.

2. При каких значениях a $a \equiv a \pmod m$?

По свойству сравнений $(a - a) \vdots m$, что верно при любых значениях a и m, где $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

3. Верно ли утверждение:

если $a \equiv b \pmod m$, то $\text{НОД}\,(a, m) = \text{НОД}\,(b, m)$, где НОД — наибольший общий делитель?

Да, так как если $a \equiv b \pmod m$, то $a = b + mt$.

Тогда $\text{НОД}\,(a, m) = \text{НОД}\,(b + mt, m) = \text{НОД}\,(b, m)$.

4. Верно ли, что если $a \cdot b \equiv 0 \pmod m$, то или $a \equiv 0 \pmod m$, или $b \equiv 0 \pmod m$?

Нет. Контрпример: $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 6$,

но $2 \equiv 0 \pmod 6$ — ложь, $3 \equiv 0 \pmod 6$ — ложь.

5. Верно ли, что если $a \cdot b \equiv 0 \pmod p$, где p — простое число, то или $a \equiv 0 \pmod p$, или $b \equiv 0 \pmod p$?

Да. Так как, если $a \cdot b \equiv 0 \pmod p$, то $a \cdot b \vdots p$, и так как p — простое число, то либо $a \vdots p$, либо $b \vdots p$, что и следовало доказать.

6. Верно ли, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \,\vdots\, m$, то и $b \,\vdots\, m$?

Да. Если $a \,\vdots\, m$, то $a = mt$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Тогда так как $a \equiv b \pmod{m}$, то по теореме **2** $(a - b) \,\vdots\, m$.
Значит $(mt - b) \,\vdots\, m$, т. е. $mt - b = mk$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, $b = mt - mk$, или $b = m(t - k)$, т. е. $b \,\vdots\, m$, что и требовалось доказать.

Отметим, что это частный случай свойства сравнений 9.

7. Приведите несколько целых значений a, при которых сравнение $2a \equiv 5 \pmod{3}$ верно.

Из условия задачи следует, что $2a = 5+3t$, т. е. $a = \frac{1}{2}(5+3t)$.

Учтем при этом, что $a \in \mathbb{Z}$, значит $5 + 3t$ — четное число.

Тогда $t = 2k - 1$, т. е. t — нечетное число;

$5 + 3(2k - 1) = 2 + 6k$.

Следовательно, $a = \frac{1}{2}(2 + 6k) = 1 + 3k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть:

$k = 1$, тогда $a = 4$, значит $8 \equiv 5 \pmod{3}$ — верно.

$k = 2$, тогда $a = 7$, значит $14 \equiv 5 \pmod{3}$ — верно.

$k = 3$, тогда $a = 10$, значит $20 \equiv 5 \pmod{3}$ — верно.

$k = -1$, тогда $a = -1$, значит $-4 \equiv 5 \pmod{3}$ — верно.

8. Найдите остаток от деления 6^{14} на 17.

Так как $6^2 \equiv 2 \pmod{17}$, то $6^{14} \equiv 2^7 \pmod{17}$.

$2^7 = 128 = 7 \cdot 17 + 9$, тогда $6^{14} \equiv 9 \pmod{17}$.

Значит, остаток от деления 6^{14} на 17 равен 9.

Практикум 8
(Применение сравнений к делимости)

1. Найдите остаток от деления 5^{20} на 24.

Докажите:

2. $(15^n - 1) \vdots 14$, где $n \in \mathbb{N}$;

3. $(3^{105} + 4^{105}) \vdots 181$;

4. $(22^{55} - 55^{22}) \vdots 7$;

5. $(37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n) \vdots 7$, где $n \in \mathbb{N}$;

6. $(5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}) \vdots 11$, где $k, m, n \in \mathbb{N}$;

7. $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq e$, для всех $n \in \mathbb{N}$;

8. $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) \vdots (a + b)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq -b$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

Найдите остаток от деления:

9. $7^{5^{5^{\cdots^{5}}}}$ на 8;

10. $776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ на 3.

Решение практикума 8

1. Найдите остаток от деления 5^{20} на 24.

Так как $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$, то, используя следствие A из свойства ③ (с. 220), можно возвести обе части сравнения в 10 степень.

Получим $5^{20} \equiv 1^{10} \pmod{24}$, т. е. $5^{20} \equiv 1 \pmod{24}$. Значит остаток при делении 5^{20} на 24 равен 1, так как по теореме о сравнении, если $5^{20} \equiv 1 \pmod{24}$, то $5^{20} = 1 + 24t$, где 1 — остаток.

2. Доказем, что $(15^n - 1) \mathrel{\vdots} 14$, где $n \in \mathbb{N}$.

Так как $15 \equiv 1 \pmod{14}$, то $15^n \equiv 1^n \pmod{14}$,

т. е. $15^n \equiv 1 \pmod{14}$, значит $15^n - 1 \equiv 0 \pmod{14}$.

Следовательно, $(15^n - 1) \mathrel{\vdots} 14$, что и следовало доказать.

3. Докажем, что $(3^{105} + 4^{105}) \mathrel{\vdots} 181$.

Так как $105 = 5 \cdot 21$, то $\begin{matrix} 3^{105} = \left(3^5\right)^{21} \\ 4^{105} = \left(4^5\right)^{21} \end{matrix}$;

$$\begin{cases} 3^5 = 243 = 181 + 62 \\ 4^5 = 1024 = 181 \cdot 6 - 62 \end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases} 3^5 \equiv 62 \pmod{181} \\ 4^5 \equiv -62 \pmod{181} \end{cases}$.

Итак, $\begin{cases} 3^{105} \equiv 62^{21} \pmod{181} \\ 4^{105} \equiv (-62)^{21} \pmod{181} \end{cases}$,

тогда $3^{105} + 4^{105} \equiv 62^{21} - 62^{21} \pmod{181}$,

значит $3^{105} + 4^{105} \equiv 0 \pmod{181}$, т. е. $(3^{105} + 4^{105}) \mathrel{\vdots} 181$, что и следовало доказать.

4. Докажем, что $(22^{55} - 55^{22}) \,\vdots\, 7$.

Так как $22 \equiv 1 \pmod 7$, то $22^{55} \equiv 1^{55} \pmod 7$;

$55 \equiv -1 \pmod 7$; $\quad 55^{22} \equiv (-1)^{22} \pmod 7$, т. е.

$$\begin{cases} 22^{55} \equiv 1 \pmod 7 \\ 55^{22} \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}.$$

Вычитая, получим $22^{55} - 55^{22} = 1 - 1 \pmod 7$,

т. е. $22^{55} - 55^{22} \equiv 0 \pmod 7$.

Значит $\left(22^{55} - 55^{22}\right) \,\vdots\, 7$, что и следовало доказать.

5. Докажем, что $(37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n) \,\vdots\, 7$, где $n \in \mathbb{N}$.

Так как $\begin{cases} 37 = 7 \cdot 5 + 2 \\ 16 = 7 \cdot 2 + 2 \\ 23 = 7 \cdot 3 + 2 \end{cases}$, то $\begin{cases} 37 \equiv 2 \pmod 7 \\ 16 \equiv 2 \pmod 7 \\ 23 \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$,

и $\begin{cases} 37^{n+2} \equiv 2^{n+2} \pmod 7 \\ 16^{n+1} \equiv 2^{n+1} \pmod 7 \\ 23^n \equiv 2^n \pmod 7 \end{cases}$.

Тогда $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n \pmod 7$,

но $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n = 7 \cdot 2^n$,

т. е. $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 7 \cdot 2^n \pmod 7$.

Учитывая свойство 9, получим, что

$(37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n) \,\vdots\, 7$, что и следовало доказать.

6. Докажем, что $(5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}) \,\vdots\, 11$, где $k, m, n \in \mathbb{N}$.

Так как $\begin{cases} 5^5 = 3125 = 11 \cdot 284 + 1 \\ 4^5 = 1024 = 11 \cdot 93 + 1 \\ 3^5 = 243 = 11 \cdot 22 + 1 \end{cases}$,

то $\begin{cases} 5^5 \equiv 1 \pmod{11} \\ 4^5 \equiv 1 \pmod{11} \\ 3^5 \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$, тогда $\begin{cases} 5^{5k} \equiv 1 \pmod{11} \\ 4^{5m} \equiv 1 \pmod{11} \\ \underline{3^{5n} \equiv 1} \pmod{11} \end{cases}$

или $\begin{cases} \underline{5^{5k+1} \equiv 5} \pmod{11} \\ 4^{5m+2} \equiv 4^2 \pmod{11} \equiv 5 \pmod{11} \\ \underline{3^{5n} \equiv 1} \pmod{11} \end{cases}$.

Сложив почленно полученные сравнения, получим

$5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 5 + 5 + 1 \pmod{11}$,

т. е. $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 11 \pmod{11}$.

Значит $(5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}) \vdots 11$,

что и следовало доказать.

7. Докажем, что $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

Так как $a - b \equiv 0 \pmod{(a - b)}$, то $a \equiv b \pmod{(a - b)}$.

Тогда $a^n \equiv b^n \pmod{(a - b)}$,

значит $a^n - n^n \equiv 0 \pmod{(a - b)}$.

Следовательно, $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$, что и следовало доказать.

8. Докажем, что $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) \vdots (a + b)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq -b$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что $(2n - 1)$ — нечетное число для всех $n \in \mathbb{N}$.

Так как $a + b \equiv 0 \pmod{(a + b)}$, то $a \equiv -b \pmod{(a + b)}$.

Тогда $a^{2n-1} \equiv (-b)^{2n-1} \pmod{(a + b)}$,

значит $a^{2n-1} \equiv -b^{2n-1} \pmod{(a + b)}$,

$a^{2n-1} + b^{2n-1} \equiv 0 \pmod{(a + b)}$.

Следовательно, $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) \vdots (a + b)$, что и следовало доказать.

Примечание. Многие примеры из практикума есть традиционные примеры для использования на доказательство методом математической индукции. Очевидно, что методы сравнения для решения задач на доказательство в ряде случаях более эффективны и менее громоздки, чем использование метода математической индукции.

9. Найдем остаток от деления $7^{5^{5^{\cdots^{5}}}}$ на 8.

Так как $7 \equiv -1 \pmod 8$,

то $7^n \equiv (-1)^n \pmod 8$, где $n = 5^{5^{\cdots^{5}}}$.

Отметим, что число $5^{5^{\cdots^{5}}}$ — число натуральное, нечетное, т. е. имеет вид $n = 2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$, тогда $(-1)^{2k+1} = -1$. Значит $7^n \equiv -1 \pmod 8$ или по теореме **1** $7^n \equiv -1 + 8t$.

Но остаток должен быть положительным числом по определению. Значит $7^n = -1 + 8t \equiv 7 + 8(t-1) = 8(t-1) + 7$, т. е. остаток равен **7**.

10. Найдем остаток от деления $776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ на 3.

Так как $\begin{cases} 776 \equiv -1 \pmod 3 \\ 777 \equiv 0 \pmod 3 \\ 778 \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$,

то $\begin{cases} 776^{776} \equiv (-1)^{776} \pmod 3, \text{ где } (-1)^{776} = 1 \\ 777^{777} \equiv 0 \pmod 3 \\ 778^{778} \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$.

Значит $776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 0 + 1 \pmod 3$,

т. е. остаток от деления $776^{776}+777^{777}+778^{778}$ на 3 равен **2**.

Тренировочная работа 5

Вариант I

Докажите:

1. $(7^{2n}-1) \vdots 16$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2. $(20^{15}-1) \vdots 11$;
3. $(10^{2n+1}+32^{2n+1}) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
4. $(2^{60}+7^{30}) \vdots 13$.

Вариант II

Докажите:

1. $(6^{2n}-1) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2. $(20^{15}-1) \vdots 31$;
3. $(17^{2n+1}+39^{2n+1}) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
4. $(4^{15}+9^{30}) \vdots 5$.

Решение тренировочной работы 5

Вариант I

Доказите:

1. $\left(7^{2n}-1\right) \vdots 16$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $7^2 = 49 = 16 \cdot 3 + 1$, то $7^2 \equiv 1 \pmod{16}$, тогда $7^{2n} \equiv 1 \pmod{16}$. Следовательно, $7^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$, значит $(7^{2n}-1) \vdots 16$, что и следовало доказать.

2. $\left(20^{15}-1\right) \vdots 11$.

Так как $20^{15} = 2^{15} \cdot 10^{15}$, то рассмотрим множители по отдельности ($2^{15} = \left(2^5\right)^3$; $10^{15} = \left(10^5\right)^3$):

а) $2^5 = 32 = 11 \cdot 3 - 1$, т.е. $\underline{2^5 \equiv -1 \pmod{11}}$.

б) $10 = 11 \cdot 1 - 1$, т.е. $\underline{10^5 \equiv -1 \pmod{11}}$.

Так как $2^5 \cdot 10^5 \equiv (-1) \cdot (-1) \pmod{11}$,

то $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$, следовательно, $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$, т.е. $\left(20^{15}-1\right) \vdots 11$, что и следовало доказать.

3. $\left(10^{2n+1} + 32^{2n+1}\right) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $\begin{cases} 10 \equiv 3 \pmod 7 \\ 32 \equiv -3 \pmod 7 \end{cases}$,

то $\begin{cases} 10^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \pmod 7 \\ 32^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1} \pmod 7 \end{cases}$.

Отметим, что $2n+1$ — нечетное число,

значит $(-3)^{2n+1} = -3^{2n+1}$.

Тогда $10^{2n+1} + 32^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} - 3^{2n-1} \pmod 7$,

т.е. $10^{2n+1} + 32^{2n+1} \equiv 0 \pmod 7$.

Значит $\left(10^{2n+1} + 32^{2n+1}\right) \vdots 7$, что и следовало доказать.

Отметим, что в данном случае можно доказать кратность 7, используя результаты примера 8 практикума 8 (см. с. 237).

Действительно, $\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right) \vdots (a+b)$, что было ранее доказано. Полагая, что $a=10$, $b=32$, получим, что $\left(10^{2n+1}+32^{2n+1}\right) \vdots (10+32)$, т. е. $\left(10^{2n+1}+32^{2n+1}\right) \vdots 42$.

Так как $42 \vdots 7$, то $\left(10^{2n+1}+32^{2n+1}\right) \vdots 7$, что и следовало доказать.

Примечание. По сути мы доказали более сильное утверждение: $\left(10^{2n+1}+32^{2n+1}\right) \vdots 42$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

4. $\left(2^{60}+7^{30}\right) \vdots 13$.

$2^{60}=\left(2^4\right)^{15}$; $7^{30}=\left(7^2\right)^{15}$.

Так как $\begin{cases} 2^4=16=13\cdot 1+3 \\ 7^2=49=13\cdot 4-3 \end{cases}$, то $\begin{cases} 2^4 \equiv 3 \pmod{13} \\ 7^2 \equiv -3 \pmod{13} \end{cases}$,

тогда $\begin{cases} 2^{60} \equiv 3^{15} \pmod{13} \\ 7^{30} \equiv (-3)^{15} \pmod{13} \end{cases}$.

Следовательно, $2^{60}+7^{30}=3^{15}-3^{15} \pmod{13}$,

т. е. $2^{60}+7^{30} \equiv 0 \pmod{13}$, значит $\left(2^{60}+7^{30}\right) \vdots 13$, что и следовало доказать.

Вариант II

Докажите:

1. $(6^{2n}-1) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $6^2 = 36 = 7 \cdot 5 + 1$, то $6^2 \equiv 1 \pmod 7$. Тогда $6^{2n} \equiv 1^n \pmod 7$, т. е. $6^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod 7$. Следовательно, $(6^{2n}-1) \vdots 7$, что и требовалось доказать.

2. $(20^{15}-1) \vdots 31$.

Так как $\begin{cases} 20^2 = 400 = 31 \cdot 13 - 3 \\ 20 = 31 \cdot 1 - 11 \end{cases}$,

то $\begin{cases} 20^2 \equiv -3 \pmod{31} \\ 20 \equiv -11 \pmod{31} \end{cases}$.

Тогда $20^3 \equiv (-3) \cdot (-11) \pmod{31}$, т е. $20^3 \equiv 33 \pmod{31}$, но $33 = 31 \cdot 1 + 2$, следовательно, $20^3 \equiv 2 \pmod{31}$.

Значит $20^{15} \equiv 2^5 \pmod{31}$, но $2^5 = 32 = 31 \cdot 1 + 1$. Получим $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$, значит $20^{15} \equiv 1 \pmod{31}$. Следовательно, $(20^{15}-1) \vdots 31$, что и требовалось доказать.

3. $(17^{2n+1} + 39^{2n+1}) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $\begin{cases} 17 = 7 \cdot 2 + 3 \\ 39 = 7 \cdot 6 - 3 \end{cases}$, то $\begin{cases} 17 \equiv 3 \pmod 7 \\ 39 \equiv -3 \pmod 7 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} 17^{2n-1} \equiv 3^{2n-1} \pmod 7 \\ 39^{2n-1} \equiv (-3)^{2n-1} \pmod 7 \end{cases}$.

Следовательно, $17^{2n-1} + 39^{2n-1} \equiv 3^{2n-1} - 3^{2n-1} \pmod 7$, т. е. $17^{2n-1} + 39^{2n-1} \equiv 0 \pmod 7$.

Значит $(17^{2n+1} + 39^{2n+1}) \vdots 7$, что и следовало доказать.

Можно и иначе.

Так как $(17^{2n+1} + 39^{2n+1}) \vdots (17+39)$,

то $(17^{2n+1} + 39^{2n+1}) \vdots 56$.

Но $56 \vdots 7$, значит $(17^{2n+1} + 39^{2n+1}) \vdots 7$, что и следовало доказать (см. практикум 8, пример 8, с. 237).

4. $\left(4^{15}+9^{30}\right) \vdots 5.$

Так как $\begin{cases} 4=5\cdot 1-1 \\ 9^2=5\cdot 16+1 \end{cases}$, то $\begin{cases} 4\equiv -1 \pmod 5 \\ 9^2\equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} 4^{15}\equiv (-1)^{15} \pmod 5 \\ 9^{30}\equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$;

следовательно, $4^{15}+9^{30}\equiv -1+1 \pmod 5$,

т. е. $4^{15}+9^{30}\equiv 0 \pmod 5$. Значит $\left(4^{15}+9^{30}\right) \vdots 5$,

что и следовало доказать.

Примечание. Так как $4^{15}+9^{30}=4^{15}+81^{15}$,
то $\left(4^{15}+81^{15}\right) \vdots (4+81)$ (см. пример 8, с. 237),
т. е. $\left(4^{15}+81^{15}\right) \vdots 85$.
Тогда, учитывая, что $\left(4^{15}+9^{30}\right) \vdots 5$ и $85=5\cdot 17$, получаем: $\left(4^{15}+9^{30}\right) \vdots (5\cdot 17)$, т. е. $\left(4^{15}+9^{30}\right) \vdots 85$ — следовательно, можно было доказать более сильное утверждение.

Самостоятельная работа 3 (Использование свойств сравнений для доказательства делимости)

Вариант I

Докажите:

1. $(20^{15} - 1) \,\vdots\, 19$;
2. $(7^{2n} - 1) \,\vdots\, 8$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
3. $(10^{2n+1} + 32^{2n+1}) \,\vdots\, 6$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
4. $(20^{60} + 7^{30}) \,\vdots\, 65$.

Вариант II

Докажите:

1. $(6^{2n} - 1) \,\vdots\, 35$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2. $(10^{15} - 1) \,\vdots\, 33$;
3. $(17^{2n+1} + 39^{2n+1}) \,\vdots\, 8$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
4. $(4^{15} - 9^{30}) \,\vdots\, 11$.

Практикум 9
(Решение более сложных задач на делимость)

Докажите:

1. $\left(3^{6n}+3^{5n+1}+3^{4n+1}+3^{3n}\right) \vdots\ 8$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

2. $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots\ 84$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

3. $(36^n+10\cdot 3^n) \vdots\ 11$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

4. $\left(1^5+2^5+3^5+\ldots+99^5\right) \vdots\ 100$;

5. $\left(19^{19}+69^{19}\right) \vdots\ 44$;

6. $\left((7a+3)^{2n+1}+(7b+25)\right)^{2n+1} \vdots\ 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

7. $\left(16^n\left(2^n+1\right)+9^n\left(9^{n+1}-1\right)+5^n\left(5^{n+1}-5^n\right)\right) \vdots\ 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

8. $\left((3299^5+6)^{18}-1\right) \vdots\ 112$.

9. Найдите остаток от деления $\left(9674^6+28\right)^{15}$ на 39.

10. Докажите: $\left(1^7+2^7+3^7+\ldots+99^7+100^7\right) \vdots$
$\vdots\ (1+2+3+\ldots+99+100)$.

Решение практикума 9

1. Докажем, что $\left(3^{6n}+3^{5n+1}+3^{4n+1}+3^{3n}\right) \vdots\, 8$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $\left(3^{6n}+3^{5n+1}+3^{4n+1}+3^{3n}\right) =$

$= 3^{3n}\left((3^n)^3+3\cdot(3^n)^2+3\cdot 3^n+1\right) =$

$= 3^{3n}\left(3^n+1\right)^3 = \left(3^n\left(3^n+1\right)\right)^3,$

то докажем вначале, что $3^n\left(3^n+1\right)$ делится на 2.

Действительно, $3^n\left(3^n+1\right)$ — это произведение двух последовательных натуральных чисел, т. е. четное число.

Тогда $\left(3^n\left(3^n+1\right)\right) \vdots\, 2$, отсюда $\left(3^n\left(3^n+1\right)\right)^3 \vdots\, 2^3$, следовательно, $\left(3^{6n}+3^{5n+1}+3^{4n+1}+3^{3n}\right) \vdots\, 8$ для любых $n \in \mathbb{N}$, что и следовало доказать.

Иногда простейшие алгебраические преобразования проще и не менее эффективны, чем методы теории сравнений.

2. Докажем, что $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots\, 84$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $84 = 3\cdot 4\cdot 7$, причем

$(3,7)=1$, $(3,4)=1$ и $(4,7)=1$, т. е. числа 3, 4 и 7 есть попарно взаимно простые числа, то исходное выражение делится на каждое из этих чисел.

а) Докажем, что $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots\, 3$.

Так как $4^{2n}-3^{2n}-7 = \left(4^{2n}-1\right)-\left(3^{2n}+6\right)$, то:

1. $\left(4^{2n}-1\right) \vdots\, (4-1)$, т. е. $\left(4^{2n}-1\right) \vdots\, 3$ (см. практикум 1, пример 7).
2. Далее очевидно, что $\left(3^{2n}+6\right) \vdots\, 3$. Значит $\left(4^{2n}-2^{2n}-7\right) \vdots\, 3$.

б) Докажем далее, что $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 4$.

Преобразуем группировкой исходное выражение:

$\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right)=\left(4^{2n}-8\right)-\left(3^{2n}-1\right)$.

Так как $3^2 \equiv 1 \pmod 4$, то $3^{2n} \equiv 1 \pmod 4$,

тогда $\left(3^{2n}-1\right) \vdots 4$.

Очевидно, что $\left(4^{2n}-8\right) \vdots 4$, значит $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 4$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

в) Докажем затем, что $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 7$.

Для этого вначале докажем, что $\left(4^{2n}-3^{2n}\right) \vdots 7$.

Так как $\begin{cases} 4^2 \equiv 2 \pmod 7 \\ 3^2 \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$, то $\begin{cases} 4^{2n} \equiv 2^n \pmod 7 \\ 3^{2n} \equiv 2^n \pmod 7 \end{cases}$.

Следовательно, $4^{2n}-3^{2n} \equiv 2^n-2^n \pmod 7$,

т. е. $4^{2n}-3^{2n} \equiv 0 \pmod 7$. Тогда $\left(4^{2n}-3^{2n}\right) \vdots 7$,

а значит $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Итак, было доказано, что $\begin{cases} \left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 3 \\ \left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 4 \\ \left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 7 \end{cases}$,

где 3, 4 и 7 попарно взаимно простые числа.

Отсюда следует, что $\left(4^{2n}-3^{2n}-7\right) \vdots 84$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что и следовало доказать.

3. Докажем, что $(36^n+10\cdot 3^n) \vdots 11$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $(36^n+10\cdot 3^n)=3^n(12^n+10)=3^n((12^n-1)+11)$,

то необходимо доказать, что $(12^n-1) \vdots 11$.

Ранее было доказано, что $(12^n-1) \vdots (12-1)$ (см. пример 7, с. 237), т. е. $(12^n-1) \vdots 11$.

Значит $(36^n+10\cdot 3^n) \vdots 11$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что и следовало доказать.

4. Докажем, что $\left(1^5+2^5+3^5+\ldots+99^5\right) \vdots\, 100.$

Разобьем числовое выражение, заключенное в скобках, на пары чисел, равноудаленных от начала и конца.

$\left(1^5+99^5\right) \vdots\, (1+99)$

$\left(2^5+98^5\right) \vdots\, (2+98)$

. . . .

$\left(49^5+51^5\right) \vdots\, (49+51)$

$50^5 \vdots\, 100$

Ранее было доказано, что $\left(a^{2n-1}+b^{2n-1}\right) \vdots\, (a+b)$ (см. пример 8 в практикуме 8).

Поэтому $\left(1^5+2^5+3^5+\ldots+99^5\right) \vdots\, 100$, что и следовало доказать.

5. Докажем, что $\left(19^{19}+69^{19}\right) \vdots\, 44.$

Так как $44=4\cdot 11$, где $(4,11)=1$, то необходимо доказать, что $\left(19^{19}+69^{19}\right) \vdots\, 4$ и $\left(19^{19}+69^{19}\right) \vdots\, 11$.

а) Представим $9^{19}+69^{19}=\left(19^{19}+1\right)+\left(69^{19}-1\right).$

Так как $\begin{cases}\left(19^{19}+1\right) \vdots\, (19+1)\\ \left(69^{19}-1\right) \vdots\, (69-1)\end{cases}$, то $\begin{cases}\left(19^{19}+1\right) \vdots\, (4\cdot 5)\\ \left(69^{19}-1\right) \vdots\, (4\cdot 17)\end{cases}$,

значит $\left(19^{19}+69^{19}\right) \vdots\, 4$, так как $(4;5)=1$ и $(4;17)=1$.

б) Представим

$19^{19}+69^{19}=\left(19^{19}+3^{19}\right)+\left(69^{19}-3^{19}\right)+\left(3^{19}-3^{19}\right).$

Так как $\begin{cases}\left(19^{19}+3^{19}\right) \vdots\, (19+3)\\ \left(69^{19}-3^{19}\right) \vdots\, (69-3)\end{cases}$, то $\begin{cases}\left(19^{19}+3^{19}\right) \vdots\, 11\\ \left(69^{19}-3^{19}\right) \vdots\, 11\end{cases}$.

Итак, $\begin{cases}\left(19^{19}+69^{69}\right) \vdots\, 4\\ \left(19^{19}+69^{69}\right) \vdots\, 11\end{cases}$,

следовательно, $\left(19^{19}+69^{19}\right) \vdots\, 44$,

что и следовало доказать.

6. Докажем, что $\left((7a+3)^{2n+1}+(7b+25)\right)^{2n+1} \vdots\ 7$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

$\begin{cases} 7a+3 \equiv 3 \pmod 7 \\ 7b+25 \equiv 25 \pmod 7 \end{cases}$, но $\begin{cases} 25 \equiv -3 \pmod 7 \\ 7b+25 \equiv -3 \pmod 7 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} (7a+3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \pmod 7 \\ (7b+25)^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1} \pmod 7 \end{cases}$, значит

$(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1}-3^{2n+1} \pmod 7$,

т. е. $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1} \equiv 0 \pmod 7$.

Получим, что $\left((7a+3)^{2n+1}+(7b+25)\right)^{2n+1} \vdots\ 7$, что и следовало доказать.

7. Докажем, что

$\left(16^n\left(2^n+1\right)+9^n\left(9^{n+1}-1\right)+5^n\left(5^{n+1}-5^n\right)\right) \vdots\ 7$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Преобразуем исходное выражение, заключенное в общие скобки:

$16^n\left(2^n+1\right)+9^n\left(9^{n+1}-1\right)+5^n\left(5^{n+1}-5^n\right)=$

$=\left(32^n-5^{2n}\right)+\left(16^n-9^n\right)+\left(9^{2n+1}+5^{2n+1}\right).$

Так как $\begin{cases} 32^n-5^{2n}=\left(32^n-25^n\right) \vdots\ (32-25) \\ \left(16^n-9^n\right) \vdots\ (16-9) \\ \left(9^{2n+1}+5^{2n+1}\right) \vdots\ (9+5) \end{cases}$,

то $\begin{cases} \left(32^n-25^n\right) \vdots\ 7 \\ \left(16^n-9^n\right) \vdots\ 7 \\ \left(9^{2n+1}+5^{2n+1}\right) \vdots\ 14 \end{cases}$.

Значит $\left(\left(32^n-5^{2n}\right)+\left(16^n-9^n\right)+\left(9^{2n+1}+5^{2n+1}\right)\right) \vdots\ 7$,

т. е. $\left(16^n\left(2^n+1\right)+9^n\left(9^{n+1}-1\right)+5^n\left(5^{n+1}-5^n\right)\right) \vdots\ 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что и следовало доказать.

8. Докажем, что $\left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right) \vdots 112$.

Так как $112 = 7 \cdot 16$, а $(7,16) = 1$, т. е. взаимно простые, то необходимо доказать, что
$\left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right) \vdots 7$ и $\left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right) \vdots 16$.

а) $3299 = 7 \cdot 471 + 2$, т. е. $3299 \equiv 2 \pmod 7$,
значит $3299^5 \equiv 2^5 \pmod 7$, но $2^5 = 32 \equiv 4 \pmod 7$,
тогда $3299^5 \equiv 4 \pmod 7$.
В этом случае $3299^5 + 6 \equiv 10 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$,
т. е. $3299^5 + 6 \equiv 3 \pmod 7$.
Значит $\left(3299^5+6\right)^6 \equiv 3^6 \pmod 7$,
где $3^6 = 729 = 7 \cdot 104 + 1$,
т. е. $\left(3299^5+6\right)^6 \equiv 1 \pmod 7$.
Но тогда $\left(3299^5+6\right)^{18} \equiv 1 \pmod 7$,
что означает, что $\left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right) \vdots 7$.

б) $3299 = 16 \cdot 206 + 3$, т. е. $3299 \equiv 3 \pmod{16}$,
тогда $3299^5 \equiv 3^5 \pmod{16}$,
где $3^5 = 243 = 16 \cdot 15 + 3$, тогда $3299^5 \equiv 3 \pmod{16}$.
Отсюда $3299^5 + 6 \equiv 9 \pmod{16}$,
тогда $\left(3299^5+6\right)^2 \equiv 9^2 \pmod{16}$, где $9^2 = 81 = 16 \cdot 5 + 1$.
Значит $\left(3299^5+6\right)^2 \equiv 1 \pmod{16}$, следовательно,
$\left(3299^5+6\right)^{18} \equiv \pmod{16}$,
т. е. $\left(3299^5+16\right)^{18} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$.
Получим, что $\left(\left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right)\right) \vdots 16$.

в) Так как $\begin{cases} \left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right) \vdots 7 \\ \left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right) \vdots 16 \end{cases}$,

значит $\left(\left(3299^5+6\right)^{18}-1\right) \vdots 112$, что и следовало доказать.

9. Найдем остаток от деления $\left(9674^6+28\right)^{15}$ на 39.

Так как $39 = 13\cdot 3$, $(13;3) = 1$, то число 9674 можно представить:

а) $9674 = 3\cdot 3225 - 1$, т. е. $9674 \equiv -1 \pmod 3$,
тогда $9674^6 \equiv (-1)^6 \pmod 3$, т. е. $9674^6 \equiv 1 \pmod 3$.
$9674^6 + 28 \equiv 29 \pmod 3$ или $9674^6 + 28 \equiv -1 \pmod 3$,
тогда $\left(9674^6+28\right)^{15} \equiv -1 \pmod 3$.

б) $9674 = 13\cdot 744 + 2$, т. е. $9674 \equiv 2 \pmod{13}$,
тогда $9674^6 \equiv 2^6 \pmod{13}$.
$2^6 = 64 = 65 - 1$, следовательно, $9674^6 \equiv -1 \pmod{13}$.
Отсюда $9674^6 + 28 \equiv 27 \pmod{13}$
или $9674^6 + 28 \equiv 1 \pmod{13}$.
Тогда $\left(9674^6+28\right)^{15} \equiv 1 \pmod{13}$.

в) Итак, $\begin{cases} \left(9674^6+28\right)^{15} \equiv -1 \pmod 3 \\ \left(9674^6+28\right)^{15} \equiv 1 \pmod{13} \end{cases}$.

Отсюда следует, что
$\begin{cases} \left(9674^6+28\right)^{15} = -1 + 3\cdot k \\ \left(9674^6+28\right)^{15} = 1 + 13\cdot t \end{cases}$, где $k, t \in \mathbb{Z}$,
тогда $-1 + 3\cdot k = 1 + 13\cdot t$,
где $k = \dfrac{2+13t}{3}$ или $k = 4t + \dfrac{t+2}{3}$.
Но $k \in \mathbb{Z}$, значит $\dfrac{t+2}{3} \in \mathbb{Z}$,
т. е. $t + 2 = 3n$, где $n \in \mathbb{Z}$, отсюда $t = 3n - 2$.
Так как $\left(9674^6+28\right)^{15} = 1 + 13t = 1 + 13(3n-2) =$
$= 39n - 25$, тогда $\left(9674^6+28\right)^{15} \equiv -25 \pmod{39}$,
т. е. $\left(9674^6+28\right)^{15} \equiv 14 \pmod{39}$.

Значит остаток от деления $\left(9674^6+28\right)^{15}$ на 39 равен 14.

10. Докажем, что $\left(1^7+2^7+3^7+\ldots+99^7+100^7\right) \vdots$

$$\vdots\ (1+2+3+\ldots+99+100).$$

$$\begin{array}{rcl} S_{100} & = & 1^7+2^7+3^7+\ldots+99^7+100^7 \\ S_{100} & = & 100^7+99^7+\ldots+2^7+1^7 \\ \hline 2S_{100} & = & \left(1^7+100^7\right)+\left(2^7+99^7\right)+\ldots+\left(100^7+1^7\right). \end{array}$$

$$\text{Так как } \left.\begin{array}{l} \left(1^7+100^7\right) \vdots (1+100) \\ \left(2^7+99^7\right) \vdots (2+99) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(99^7+2^7\right) \vdots (99+2) \\ \left(100^7+1^7\right) \vdots (100+1) \end{array}\right|, \text{ то } 2\cdot S_{100} \vdots 101.$$

С другой стороны, $2S_{100}=2\left(1^7+2^7+\ldots+99^7\right)+2\cdot 100^7$,

$$\text{тогда } \begin{array}{l} \left(1^7+99^7\right) \vdots (1+99) \\ \left(2^7+98^7\right) \vdots (2+98) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(99^7+1^7\right) \vdots (99+1) \end{array}, \text{ т. е. } \left(2\cdot S_{99}+2\cdot 100^7\right) \vdots 100.$$

$$\text{Так как } \begin{cases} 2S_{100} \vdots 101 \\ 2S_{100} \vdots 100 \end{cases}, \text{ то } 2S_{100} \vdots (100\cdot 101),$$

т. е. $S_{100} \vdots \dfrac{100\cdot 101}{2}$.

Следовательно, $S_{100}=\dfrac{100\cdot 101}{2}\cdot p$, где $p\in\mathbb{N}$. С другой стороны, используя формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, получим: $1+2+3+\ldots+99+100 = \dfrac{100\cdot 101}{2}$, значит $S_{100} \vdots (1+2+3+\ldots+99+100)$, т. е. $\left(1^7+2^7+3^7+\ldots+99^7+100^7\right) \vdots (1+2+3+\ldots+99+100)$, что и следовало доказать.

Примечания

1. В данном примере было использовано доказанное ранее в практикуме 8 утверждение $\left(a^{2k-1}+b^{2k-1}\right) \vdots (a+b)$ для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \neq -b)$.

2. Можно доказать, что
$$\left(a_1^{2k-1}+a_2^{2k-1}+\ldots+a_n^{2k-1}\right) \vdots (a_1+a_2+\ldots+a_n),$$
где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$.

   Для доказательства требуется использование метода математической индукции и применение аппарата теории сравнений чисел a и b по модулю m.

Тренировочная работа 6
(Более сложные примеры на применение свойств сравнений для доказательства делимости)

Вариант I

Докажите:

1. $(16^n - 9^n - 7) \vdots 21$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2. $\left((7a+10)^{2n-1} + (7b+18)^{2n-1}\right) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$;
3. $\left((2455^5+6)^{12} - 1\right) \vdots 14$.
4. Найти остаток от деления $\left(8153^6 + 67\right)^{15}$ на 39.

Вариант II

Докажите:

1. $\left(7^{2n} - 4^{2n} - 33\right) \vdots 48$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2. $\left((11b+13)^{2n-1} + (11a+20)^{2n-1}\right) \vdots 11$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$;
3. $\left((2719^5+6)^{24} - 1\right) \vdots 56$;
4. $\left(1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \ldots + m^{2n-1}\right) \vdots (1+2+3+\ldots+m)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Решение тренировочной работы 6

Вариант I

1. Докажем, что $(16^n - 9^n - 7) \vdots 21$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как $21 = 3 \cdot 7$ и $(3, 7) = 1$, то необходимо доказать, что $(16^n - 9^n - 7) \vdots 3$ и $(16^n - 9^n - 7) \vdots 7$.

Известно, что $(16^n - 9^n) \vdots (16-9)$, тогда $(16^n - 9^n - 7) \vdots 7$.

$16^n - 9^n - 7 = (16^n - 1) - (9^n + 6)$.

Так как $\begin{cases} (16^n - 1) \vdots (16 - 1) \\ (9^n + 6) \vdots 3 \end{cases}$, то $((16^n - 1) - (9^n + 6)) \vdots 3$.

Значит $(16^n - 9^n - 7) \vdots 21$, что и следовало доказать.

2. Докажем, что $\left((7a + 10)^{2n-1} + (7b + 18)^{2n-1}\right) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

а) $\begin{cases} 7a + 10 \equiv 3 \pmod 7 \\ 7b + 18 \equiv -3 \pmod 7 \end{cases}$,

тогда $\begin{cases} (7a + 10)^{2n-1} \equiv 3^{2n-1} \\ (7b + 18)^{2n-1} \equiv (-3)^{2n-1} \end{cases}$, значит

$(7a + 10)^{2n-1} + (7b + 18)^{2n-1} \equiv 3^{2n-1} - 3^{2n-1} \pmod 7$,

т. е. $\left((7a + 10)^{2n-1} + (7b + 18)^{2n-1}\right) \vdots 7$

для любого $n \in \mathbb{N}$, при этом $a, b \in \mathbb{Z}$.

б) Возможно иное доказательство. Известно, что $\left((7a + 10)^{2n-1} + (7b + 18)^{2n-1}\right) \vdots (7a + 10 + 7b + 18)$.

При этом $7a + 10 + 7b + 18 = \big(7(a + b) + 28\big) \vdots 7$. Значит $\left((7a + 10)^{2n-1} + (7b + 18)^{2n-1}\right) \vdots 7$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и $a, b \in \mathbb{Z}$, что и следовало доказать.

3. Докажем, что $\left((2455^5 + 6)^{12} - 1\right) \vdots 14$.

$14 = 2 \cdot 7$, где $(2, 7) = 1$.

а) Докажем, что $\left((2455^5 + 6)^{12} - 1\right) \vdots 2$.

$2455 = 2 \cdot 1227 + 1$, тогда $2455 \equiv 1 \pmod 2$, следовательно, $2455^5 \equiv 1 \pmod 2$.

Далее $2455^5+6 \equiv 7 \pmod 2$, тогда $2455^5+6 \equiv 1 \pmod 2$. Отсюда следует, что $\left(2455^5+6\right)^{12} \equiv 1 \pmod 2$ или иначе $\left(2455^5+6\right)^{12} - 1 \equiv 0 \pmod 2$.

Значит $\left(\left(2455^5+6\right)^{12} - 1\right) \vdots 2$.

б) Докажем, что $\left(\left(2455^5+6\right)^{12} - 1\right) \vdots 7$.

$2455 = 7 \cdot 350 + 5$, тогда $2455 \equiv 5 \pmod 7$ или $2455 \equiv -2 \pmod 7$. Значит $2455^5 \equiv (-2)^5 \pmod 7$, но $(-2)^5 = -32 = 7(-5)+3$, отсюда $2455^5 \equiv 3 \pmod 7$. Далее $2455^5+6 \equiv 9 \pmod 7$ или $2455^5+6 \equiv 2 \pmod 7$, тогда $\left(2455^5+6\right)^3 \equiv 2^3 \pmod 7$.

Получили $\left(2455^5+6\right)^3 \equiv 1 \pmod 7$.

Следовательно, $\left(2455^5+6\right)^{12} \equiv 1 \pmod 7$, отсюда $\left(2455^5+6\right)^{12} - 1 \equiv 0 \pmod 7$.

Значит $\left(\left(2455^5+6\right)^{12} - 1\right) \vdots 7$.

в) $\begin{cases} \left(\left(2455^5+6\right)^{12} - 1\right) \vdots 2 \\ \left(\left(2455^5+6\right)^{12} - 1\right) \vdots 7 \end{cases}$,

тогда $\left(\left(2455^5+6\right)^{12} - 1\right) \vdots 14$, что и следовало доказать.

4. Найдем остаток от деления $\left(8153^6+67\right)^{15}$ на 39.

$39 = 3 \cdot 13$, где $(3,13) = 1$. Необходимо найти остатки от деления $\left(8153^6+67\right)^{15}$ на 3 и на 13, а затем их сравнить.

а) $8153 = 3 \cdot 2717 + 2$, т. е. $8153 \equiv 2 \pmod 3$, тогда $8153^6 \equiv 2^6 \pmod 3$.

$2^6 \equiv 64 = 3 \cdot 21 + 1$, отсюда $8153^6 \equiv 1 \pmod 3$, тогда $8153^6 + 67 \equiv 68 \pmod 3$.

Так как $68 = 3 \cdot 21 - 1$, то $8153^6 + 67 \equiv -1 \pmod 3$. Тогда $\left(8153^6+67\right)^{15} \equiv (-1)^{15} \pmod 3$. Следовательно, $\left(8153^6+67\right)^{15} \equiv -1 \pmod 3$.

б) $8153 = 13 \cdot 627 + 2$, тогда $8153 \equiv 2 \pmod{13}$, отсюда $8153^6 \equiv 2^6 \pmod{13}$.

Учитывая, что $2^6 = 13 \cdot 5 - 1$, получили

$8153^6 \equiv -1 \pmod{13}$. Значит $8153^6 + 67 \equiv 66 \pmod{13}$.

Далее $8153^6 + 67 \equiv 1 \pmod{13}$, так как $66 = 13 \cdot 5 + 1$.

Следовательно, $\left(8153^6 + 67\right)^{15} \equiv 1 \pmod{13}$.

в) Так как $\begin{cases} \left(8153^6 + 67\right)^{15} \equiv -1 \pmod{3} \\ \left(8153^6 + 67\right)^{15} \equiv 1 \pmod{13} \end{cases}$,

то $\begin{cases} \left(8153^6 + 67\right)^{15} \equiv -1 + 3t \\ \left(8153^6 + 67\right)^{15} \equiv 1 + 13k \end{cases}$, где $k, t \in \mathbb{Z}$.

Тогда $-1 + 3t = 1 + 13k$. После преобразования

$3t = 2 + 13k; \quad t = \dfrac{2 + 13k}{3}$ или $t = 4k + \dfrac{2 + k}{3}$.

Но $\dfrac{2 + k}{3} \in \mathbb{Z}$, значит $2 + k = 3m$, где $m \in \mathbb{Z}$,

тогда $k = 3m - 2$.

Следовательно, так как $-1 + 3t = 1 + 13k$,

то $-1 + 3t = 1 + 13(3m - 2) = 39m - 25$.

Тогда $\left(\underline{8153^6 + 67}\right)^{15} = 39m - 25 = \underline{39(m - 1) + 14}$,

что означает, что при делении $\left(8153^6 + 67\right)^{15}$ на 39 остаток равен **14**.

Примечание. Вариант II решите сами. Доказательство в заданиях 1–3 варианта II аналогично доказательству в заданиях 1–3 варианта I. Доказательство задания 4 варианта II аналогично доказательству задания 10 практикума 9 (см. с. 252).

Самостоятельная работа 4 (Более сложные примеры на использование свойств сравнений для доказательства делимости)

Вариант I

Доказите:

1. $\left(3^{6n}+3^{5n+1}+3^{4n+1}+3^{n}\right) \vdots 12$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2. $\left(17^{11}+23^{11}\right) \vdots 5$.

Найдите остаток от деления:

3. $\left(17^{11}+23^{11}\right) \vdots 5$;
4. $\left(1^{3}+2^{3}+3^{3}+\ldots+49^{3}\right) \vdots 25$.

Вариант II

Докажите:

1. $\left(3^{2n}-4^{2n}+7\right) \vdots 12$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
2. $\left(\left(3299^{5}+6\right)^{18}-1\right) \vdots 56$;
3. $\left((2a+7)^{2n-1}+(5b+8)\right) \vdots 5$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$;
4. $\left(1^{5}+2^{5}+3^{5}+\ldots+50^{5}\right) \vdots (1+2+3+\ldots+50)$.

Свойства сравнений и признаки делимости

Следствием основных свойств теории сравнений является свойства сравнений двух многочленов.

> **Свойство сравнений (10).**
> **Пусть $S(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$.**
> **Рассмотрим $\begin{cases} S(b) = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1b + a_0 \\ S(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1c + a_0 \end{cases}$,**
> **тогда если $b \equiv c \pmod m$, то $S(c) \equiv S(b) \pmod m$.**

Значит, $a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1b + a_0 \equiv$
$\equiv a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1c + a_0 \pmod m$.

Из данного свойства следуют важнейшие признаки делимости. Представим произвольное число N в десятичной системе счисления. Например:
$732\,685 = 7 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5.$
В общем виде
$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$
где $N = a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ — запись числа N в позиционной системе счислений.
Но иногда записывают по-другому: $N = \overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0}$.

1. Рассмотрим признак делимости на 9.

   Так как $10=9+1$, то $10\equiv 1 \pmod 9$. Тогда $10^k \equiv 1 \pmod 9$, следовательно, число $N \equiv a_n\cdot 1 + a_{n-1}\cdot 1 + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9$. Значит число $N \vdots 9$, если $\left(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0\right) \vdots 9$.

   > **Любое число делится на 9, если сумма всех его цифр делится на 9.**

2. Очевидно, что так же можно получить признак делимости на 3.

   Действительно, $10 \equiv 1 \pmod 3 \ldots 10^k \equiv 1 \pmod 3$, тогда $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 3$, значит $N \vdots 3$, если $\left(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0\right) \vdots 3$.

   > **Любое число делится на 3, если сумма всех его цифр делится на 3.**

3. Признак делимости на 11.

Число N при делении на 11 дает тот же остаток, что и сумма цифр со знакочередующимися знаками, так как $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Значит $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$,

т. е. $10^n \equiv -1 \pmod{11}$, следовательно

$N \equiv a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \ldots + a_0 \pmod{11}$.

Пример 1. Выясните, какой остаток получится при делении на 11 чисел: 421 432, 5 673 941, 4 937 651, 15 673 944.

а) $421\,432 = 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2$,

тогда $421\,432 \equiv -4 + 2 - 1 + 4 - 3 + 2 \pmod{11}$,

т. е. $421\,432 \equiv 0 \pmod{11}$, значит $421\,432 \,\vdots\, 11$.

б) $5\,673\,941 = 5 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 +$ $+ 4 \cdot 10^1 + 1$, тогда знакочередующаяся сумма цифр равна: $5-6+7-3+9-4+1=9 \not\vdots\, 11$, т. е. $5673941 \not\vdots\, 11$, остаток равен 9.

в) Для 4 937 651 знакочередующаяся сумма равна

$4 - 9 + 3 - 7 + 6 - 5 + 1 = -7 \not\vdots\, 11$, но остаток должен быть неотрицательным.

Так как $(-7) \equiv 4 \pmod{11}$, то остаток равен 4, учитывая, что $(-7) = 11 \cdot (-1) + 4$.

г) Для числа 15 673 944 соответствующая сумма равна $-1+5-6+7-3+9-4+4=11 \,\vdots\, 11$, т. е. $15673944 \,\vdots\, 11$.

Примечание. В случае знакочередующейся суммы цифр не принципиально для вычисления делимости, с какого знака начинается чередование знаков цифр.

4. Рассмотрим признак делимости числа на 7 или нахождение остатка от деления числа на 7.

   Для этого проследим за остатками первых семи последовательных степеней (ненулевых) числа 10:

   $$\begin{array}{ll} 10^1 \equiv 3 \pmod 7, & 10^5 \equiv -2 \pmod 7, \\ 10^2 \equiv 2 \pmod 7, & 10^6 \equiv 1 \pmod 7, \\ 10^3 \equiv -1 \pmod 7, & 10^7 \equiv 3 \pmod 7. \\ 10^4 \equiv -3 \pmod 7, & \end{array}$$

   Далее остатки **повторяются**. Значит, число N делится на 7, если соответствующая сумма цифр делится на 7:

   $$\boxed{M = a_0 + \underline{3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7}}\,.$$

   Напомним, что в данном случае мы начинаем рассматривать коэффициенты в обратном порядке:

   $$\boxed{N = a_0 + \underline{a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_6 \cdot 10^6 + a_7 \cdot 10^7} + \ldots}$$

Пример 2. Определите, какие из чисел делятся на 7: 221 432, 234 122, 23 543 723, 3 162 819.

а) Число $221\,432 = 2+3\cdot10^1+4\cdot10^2+1\cdot10^3+2\cdot10^4+2\cdot10^5$, тогда $M = 2+3\cdot3+2\cdot4-1-3\cdot2-2\cdot2 = 8 \not\vdots\, 7$.

   Число $221\,432 \not\vdots\, 7$. Так как $8 \equiv 1 \pmod 7$, то остаток от деления 221 432 на 7 равен **1**.

б) Число $234\,122 = 2+2\cdot10^1+1\cdot10^2+4\cdot10^3+3\cdot10^4+2\cdot10^5$, тогда $M = 2+3\cdot2+2\cdot1-1\cdot4-3\cdot3-2\cdot2 = -7 \,\vdots\, 7$, значит $234\,122 \,\vdots\, 7$.

   Обратите внимание на то, что числа 221 432 и 234 122 состоят из одних и тех же цифр, но взятых в обратном порядке. Это влияет на их делимость на 7, но не влияет на их делимость на 11.

в) Для числа 23 543 723 сумма произведений цифр на остатки от деления

$$23\,543\,723 = 3 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + \\ + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^7.$$

Тогда по общей формуле

$M = 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 - 1 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 7 \,\vdots\, 7$, т. е. $23\,543\,723 \,\vdots\, 7$.

г) Для числа 3 162 819 сумма произведений цифр на остатки от деления соответствующих степеней 10 на 7 равна: $M = 9 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 8 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 6 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 9 \not\vdots\, 7$, значит число $3\,162\,819 \not\vdots\, 7$.

Так как $9 \equiv 2 \pmod 7$, то остаток от деления числа 3 162 819 на 7 равен **2**.

5. Признак делимости Паскаля

Число N делится на число m тогда и только тогда, когда сумма всех произведений цифр числа N на остатки, полученные от деления соответствующих степеней 10 на число m, делится на число m.

Рассмотрим более подробно.

Напомним, что цифры числа N

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Пусть $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$ — запись числа N в десятичной системе счисления, где число

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_i \cdot 10^i + \ldots + a_0$.

Пусть r_i — остаток от деления 10^i на m,

где $m = 1, 2, \ldots, n$.

Число N делится на m тогда и только тогда, когда число $M = a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_i \cdot r_i + \ldots + a_1 \cdot r_1 + a_0$ делится на m.

Докажем это.

$$\begin{array}{lll} \text{Пусть} & 10 \equiv r_1 \pmod{m} \quad , \text{ тогда} & a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \cdot r_1 \pmod{m} \\ & 10^2 \equiv r_2 \pmod{m} & a_2 \cdot 10^2 \equiv a_2 \cdot r_2 \pmod{m} \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & 10^i \equiv r_i \pmod{m} & a_i \cdot 10^i \equiv a_i \cdot r_i \pmod{m} \\ & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & 10^n \equiv r_n \pmod{m} & a_n \cdot 10^n \equiv a_n \cdot r_n \pmod{m} \end{array}$$

где $(r_i, m) = 1$.

Так как $a_i \cdot 10 \equiv a \cdot r_i \pmod{m}$, то

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_i \cdot 10^i + \ldots + a_1 \cdot 10^1 \equiv$

$\equiv a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_i \cdot r_i + \ldots + a_1 \cdot r_1 \pmod{m}$.

Далее, так как

$N - a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_i \cdot 10^i + \ldots + a_1 \cdot 10^1$,

$M - a_0 = a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \ldots + a_i \cdot r_i + \ldots + a_1 \cdot r_1$,

то $N - a_0 \equiv M - a_0 \pmod{m}$, значит $N \equiv M \pmod{m}$.

Следовательно, по свойству сравнений 9

если $N \,\vdots\, m$, то $M \,\vdots\, m$ и если $M \,\vdots\, m$, то $N \,\vdots\, m$.

Поэтому, числа M и N могут делиться на m только одновременно.

Практикум 10

1. Используя признак делимости Паскаля:

а) найдите признак делимости на 8;

б) найдите признак делимости на 13;

в) найдите признак делимости на 15;

г) найдите признак делимости на 17;

д) найдите признак делимости на 27;

е) найдите признак делимости на 37.

2. Выясните, на какие из простых чисел 13, 17, 19, 23, 29, 41 делятся числа 464 899, 232 921, или найдите их остатки.

Решение практикума 10

1. Используя признак делимости Паскаля, установим признаки делимости.

а) Найдем признак делимости на 8.

$10 \equiv 2 \pmod 8 \qquad r_1 = 2$
$10^2 \equiv 4 \pmod 8 \qquad r_2 = 4$
$10^3 \equiv 0 \pmod 8 \qquad r_3 = 0$
$10^4 \equiv 0 \pmod 8 \qquad r_4 = 0$
....
$10^n \equiv 0 \pmod 8 \qquad r_n = 0$

значит $M = a_0 + \underline{2a_1 + 4a_2}$, тогда если $M \vdots 8$, то $N \vdots 8$.

Очевидно, что в этом случае a_0 — четное число.

Следовательно, если $(a_0 + 2a_1 + 4a_2) \vdots 8$, то число $N \vdots 8$.

б) Найдем признак делимости на 13.

$10 \equiv -3 \pmod{13} \qquad r_1 = -3$
$10^2 \equiv -4 \pmod{13} \qquad r_2 = -4$
$10^3 \equiv -1 \pmod{13} \qquad r_3 = -1$
$10^4 \equiv 3 \pmod{13} \qquad r_4 = 3$
$10^5 \equiv 4 \pmod{13} \qquad r_5 = 4$
$10^6 \equiv 1 \pmod{13} \qquad r_6 = 1$
$10^7 \equiv -3 \pmod{13} \qquad r_7 = -3$

Далее идет повтор остатков,

т. е. $M = \underline{a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + a_6 + \ldots}$

Значит, если $M \vdots 13$, то $N \vdots 13$.

Следовательно, если $(a_0 - \underline{3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + a_6}) \vdots 13$, то $N \vdots 13$.

в) Найдем признак делимости на 15.

$$\begin{cases} 10 \equiv -5 \pmod{15} \\ 10^2 \equiv -5 \pmod{15} \end{cases}$$

Далее идет повтор остатков, $M = a_0 - 5a_1 - \ldots$

Можно проще. Так как $15=3\cdot5$, где $(3,5)=1$, то сумма цифр должна быть кратна 3, а последняя цифра числа должна быть или 5, или 0.

Следовательно, если $(a_0-5a_1)\,\vdots\,15$, то $N\,\vdots\,15$.

г) Найдем признак делимости на 17.

$10\equiv-7 \pmod{17}$	$r_1=-7$	$10^9\equiv7 \pmod{17}$
$10^2\equiv-2 \pmod{17}$	$r_2=-2$	$10^{10}\equiv2 \pmod{17}$
$10^3\equiv-3 \pmod{17}$	$r_3=-3$	$10^{11}\equiv3 \pmod{17}$
$10^4\equiv4 \pmod{17}$	$r_4=4$	$10^{12}\equiv-4 \pmod{17}$
$10^5\equiv6 \pmod{17}$	$r_5=6$	$10^{13}\equiv-6 \pmod{17}$
$10^6\equiv-8 \pmod{17}$	$r_6=-8$	$10^{14}\equiv8 \pmod{17}$
$10^7\equiv5 \pmod{17}$	$r_7=5$	$10^{15}\equiv-5 \pmod{17}$
$10^8\equiv-1 \pmod{17}$	$r_8=-1$	$10^{16}\equiv1 \pmod{17}$.

Тогда

$$M=a_0-\underline{7a_1-2a_2-3a_3+4a_4+6a_5-8a_6+5a_7-a_8}-\left(\underline{\underline{-7a_9-2a_{10}-3a_{11}+4a_{12}+6a_{13}-8a_{14}+5a_{15}-a_{16}}}\right)+(\ldots).$$

Через каждые последующие восемь цифр происходит смена знаков следующих восьми цифр.

Следовательно, если $(a_0-\underline{7a_1-2a_2-3a_3+4a_4}+$ $+\underline{6a_5-8a_6+5a_7-a_8})\,\vdots\,17$, то $N\,\vdots\,17$.

д) Найдем признак делимости на 27.

$10\equiv-17 \pmod{27}$
$10^2\equiv-8 \pmod{27}$
$10^3\equiv1 \pmod{27}$
$10^4\equiv-17 \pmod{27}$

Далее идет повтор остатков,

т. е. $M=a_0-\underline{17a_1-8a_2+a_3\ldots}$

Значит, если $M\,\vdots\,27$, то $N\,\vdots\,27$.

Следовательно, если $(a_0-\underline{17a_1-8a_2+a_3})\,\vdots\,27$, то $N\,\vdots\,27$.

е) Найдем признак делимости на 37.

$10 \equiv -27 \pmod{37}$
$10^2 \equiv -11 \pmod{37}$
$10^3 \equiv 1 \pmod{37}$
$10^4 \equiv -27 \pmod{37}$
. . . .

Далее идет повтор остатков,

т. е. $M = a_0 - \underline{27a_1 - 11a_2 + a_3} + \ldots$

Значит, если $M \,\vdots\, 37$, то $N \,\vdots\, 37$.

$\boxed{\text{Следовательно, если } (a_0 - \underline{27a_1 - 11a_2 + a_3}) \,\vdots\, 37, \text{ то } \underline{N \,\vdots\, 37}.}$

2. Выясните, на какие из простых чисел 13, 17, 19, 23, 29, 41 делятся числа 464 899, 232 921, или найдите их остатки.

а) Проверим делимость данных чисел на 13.

Используем признак делимости на 13, найденный ранее.

1. Рассмотрим 464 899 .
$M = a_0 - \underline{3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + a_6} + \ldots$
Тогда $M = 9-3\cdot9-4\cdot8-1\cdot4+3\cdot6+4\cdot4 = -20 \not\vdots\, 13$.
Отметим, что из шести слагаемых периода использовано только пять, так число N — шестизначное. Далее, так как $-20 \equiv 6 \pmod{13}$, то остаток деления 464 899 на 13 равен $\underline{6}$.
2. Рассмотрим 232 921, где
$M = 1 - 3\cdot2 - 4\cdot9 - 1\cdot2 + 3\cdot3 + 4\cdot2 = -26 \,\vdots\, 13$,
значит $232\,921 \,\vdots\, 13$.

б) Проверим делимость данных чисел на 17, используя найденный ранее признак.

$M = a_0 - \underline{7a_1 - 2a_2 - 3a_3 + 4a_4 + 6a_5 - 8a_6 + 5a_7 - a_8} - (\ldots)$.

1. Для 464 899
$M = 9 - 7\cdot9 - 2\cdot8 - 3\cdot4 + 4\cdot6 + 6\cdot4 = -34 \,\vdots\, 17$,
значит $464\,899 \,\vdots\, 17$.

2. Для 232 921 $M=1-7\cdot2-2\cdot9-3\cdot2+4\cdot3+6\cdot2=-13\not\vdots 17$, значит $232\,921 \not\vdots 17$.
   Так как $-13 \equiv 4 \pmod{17}$, то остаток от деления 232 921 на 17 равен 4.

в) Проверим делимость данных чисел на 19.

Для этого, используя теорему-признак Паскаля, выведем признак делимости на 19.

$10 \equiv -9 \pmod{19}$ $\quad r_1 = -9$
$10^2 \equiv 5 \pmod{19}$ $\quad r_2 = 5$
$10^3 \equiv 12 \pmod{19}$ $\quad r_3 = 12$
$10^4 \equiv 6 \pmod{19}$ $\quad r_4 = 6$
$10^5 \equiv 3 \pmod{19}$ $\quad r_5 = 3$
$10^6 \equiv 11 \pmod{19}$ $\quad r_6 = 11$
$10^7 \equiv 15 \pmod{19}$ $\quad r_7 = 15$
$10^8 \equiv 17 \pmod{19}$ $\quad r_8 = 17$
$10^9 \equiv 18 \pmod{19}$ $\quad r_9 = 18$
$10^{10} \equiv 9 \pmod{19}$

Далее остатки с точностью до противоположного знака повторяются. Тогда

$$M = a_0 - \underline{9a_1 + 5a_2 + 12a_3 + 6a_4 + 3a_5 + 11a_6 + 15a_7} + \\ + \underline{17a_8 + 18a_9} - (\ldots)$$

1. Тогда для числа 464 899
   $M = 9 - 9\cdot9 + 5\cdot8 + 12\cdot4 + 6\cdot6 + 3\cdot4 = 64 \not\vdots 19$.
   Так как $64 \equiv 7 \pmod{19}$, то остаток от деления 464 899 на 19 равен **7**.
2. Для 232 921 число
   $M = 1 - 9\cdot2 + 5\cdot9 + 12\cdot2 + 6\cdot3 + 3\cdot2 = 76 \vdots 19$,
   значит число $232\,921 \vdots 19$.

г) Проверим делимость данных чисел на 23.

Для этого выведем признак делимости любого числа на 23.

$$
\begin{array}{ll}
10 \equiv -13 \pmod{23} & r_1 = -13 \\
10^2 \equiv 8 \pmod{23} & r_2 = 8 \\
\left[\begin{array}{l}
10^3 \equiv 11 \pmod{23} \\
10^4 \equiv -5 \pmod{23} \\
10^5 \equiv -4 \pmod{23} \\
10^6 \equiv 6 \pmod{23} \\
10^7 \equiv -9 \pmod{23}
\end{array}\right. &
\begin{array}{l}
r_3 = 11 \\
r_4 = -5 \\
r_5 = -4 \\
r_6 = 6 \\
r_7 = -9
\end{array} \\
10^8 \equiv -11 \pmod{23} & \\
10^9 \equiv 5 \pmod{23} &
\end{array}
$$

Число M равно

$a_0 - 13a_1 + 8a_2 + \underline{11a_3 - 5a_4 - 4a_5 + 6a_6 - 9a_7} - (\ldots)$ — далее повтор с точностью до противоположного знака.

1. Для числа 464 899
   $M = 9 - 13 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + 11 \cdot 4 - 5 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = -46 \,\vdots\, 23$,
   значит число $464\,899 \,\vdots\, 23$.
2. Для числа 232 921
   $M = 1 - 13 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 11 \cdot 2 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 46 \,\vdots\, 23$,
   значит $232\,921 \,\vdots\, 23$.

д) Проверим делимость данных чисел на 29.

Для этого выведем признак делимости на 29.

$$
\begin{array}{ll}
10^1 \equiv -19 \pmod{29} & r_1 = -19 \\
10^2 \equiv -16 \pmod{29} & r_2 = -16 \\
10^3 \equiv -15 \pmod{29} & r_3 = -15 \\
10^4 \equiv -5 \pmod{29} & r_4 = -5 \\
10^5 \equiv -21 \pmod{29} & r_5 = -21 \\
10^6 \equiv -7 \pmod{29} & r_6 = -7 \\
10^7 \equiv -2 \pmod{29} & r_7 = -2 \\
10^8 \equiv 9 \pmod{29} & r_8 = 9 \\
10^9 \equiv 3 \pmod{29} & r_9 = 3 \\
10^{10} \equiv 1 \pmod{29} & r_{10} = 1 \\
10^{11} \equiv -19 \pmod{29} &
\end{array}
$$

Далее идут повторы (циклы), тогда число M равно

$a_0 \; \underline{-19a_1 - 16a_2 - 15a_3 - 5a_4 - 21a_5} -$

$-\underline{7a_6 - 2a_7 + 9a_8 + 3a_9 + 1 \cdot a_{10}} + \ldots$

1. Для числа 464 899
   $M = 9 - 19\cdot 9 - 16\cdot 8 - 15\cdot 4 - 5\cdot 6 - 21\cdot 4 = -464 \,\vdots\, 29$,
   значит число $464899 \,\vdots\, 29$.
2. Для числа 232 921
   $M = 1 - 19\cdot 2 - 16\cdot 9 - 15\cdot 2 - 5\cdot 3 - 21\cdot 2 = -268 \not\vdots\, 29$,
   значит $232921 \not\vdots\, 29$.
   Так как $-268 \equiv 22 \pmod{29}$, то остаток от деления 232 921 на 29 равен **22**.

е) Проверим делимость данных чисел на 41.

Для этого выведем признак делимости на 41.

$10 \equiv -31 \pmod{41}$ $\quad r_1 = -31$
$10^2 \equiv -23 \pmod{41}$ $\quad r_2 = -23$
$10^3 \equiv 16 \pmod{41}$ $\quad r_3 = 16$
$10^4 \equiv -4 \pmod{41}$ $\quad r_4 = -4$
$10^5 \equiv 1 \pmod{41}$ $\quad r_5 = 1$
$10^6 \equiv -31 \pmod{41}$

Далее идут повторы (циклы), тогда

$M = a_0 - \underline{31a_1 - 23a_2 + 16a_3 - 4a_4 + a_5} + (\ldots)$.

1. Для числа 464 899
   $M = 9 - 31\cdot 9 - 23\cdot 8 + 16\cdot 4 - 4\cdot 6 + 1\cdot 4 = -410 \,\vdots\, 41$,
   значит $464899 \,\vdots\, 41$.
2. Для числа 232921
   $M = 1 - 31\cdot 2 - 23\cdot 9 + 16\cdot 2 - 4\cdot 3 + 1\cdot 2 = -246 \,\vdots\, 41$,
   значит $232921 \,\vdots\, 41$.

Подведем некоторые итоги.

а) Число 464 899 имеет делители 17, 23, 29, 41. Причем, если их перемножить, получим: $17\cdot 23\cdot 29\cdot 41 = 464899$.

б) Число 232 921 имеет делители 13, 19, 23, 41. Причем, если их перемножить, то получим: $13\cdot 19\cdot 23\cdot 41 = 232921$.

Отсюда следует, что НОД $(464899, 232921) = 23\cdot 41 = 943$.

Разумеется, это слишком экзотический способ нахождения НОД, потому что заранее делители этих чисел неизвестны, а их нахождение без специальных методов очень трудно.

в) НОД прекрасно находится методом последовательного деления большего числа на меньшее, а именно методом-алгоритмом древнегреческого философа-математика Евклида (IV–III в. до н. э.). Евклид нашел этот способ для отыскания общей меры отрезков. В современной математике под алгоритмом понимается правило (предписание), по которому выполняется то или иное арифметическое действие.

Алгоритм Евклида и решение диофантовых уравнений

<u>Определение 1</u>. Наибольшее целое число d, которое является делителем как целого числа a, так и целого числа b, называется наибольшим делителем чисел a и b. Обозначается и записывается этот факт так: НОД $(a, b) = d$.

Например:
НОД $(12, 18) = 6$, НОД $(14, 15) = 1$, НОД $(-6, -21) = 3$.
Очевидно, что НОД $(0, 0)$ — не определен.

<u>Определение 2</u>. Если НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Например: $(10, 21) = 1$; $(21, 25) = 1$.

Аналогично можно дать **определение для нескольких чисел**: НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$, где d — есть наибольшее целое число, являющееся делителем целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Определение 3</u>. Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются взаимно простыми, если НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. В этом случае иногда записывают проще: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.

Например: НОД $(3, 4, 5, 6, 7, 8) = 1$, НОД $(4, 5, 8, 10, 12) = 1$.

<u>Определение 4</u>. Целые числа называются попарно взаимно простыми, если наибольший делитель любых двух чисел из этого набора равен 1.

Теорема 1. Если n чисел, где $n \geqslant 3$ являются попарно взаимно простыми, то они являются и взаимно простыми.

Внимание! Например, числа 4, 8, 9 — есть взаимно простые, но, увы, они не являются попарно простыми, так как НОД $(4, 8) = 2 \neq 1$.

Теорема 2. Если НОД $(a, b) =$ НОД $(b, c) = a$, то НОД $(a, c) = a$.

Например: НОД $(42, 18) =$ НОД $(18, 12) = 6$,
тогда НОД $(42, 18) =$ НОД $(42, 12) = 6$.

Теорема 3. Если $a^2+b^2 \neq 0$ (т. е. хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю), то НОД$(a,b)=$НОД$(a-b,b)=$НОД$(a-2\cdot b,b)=$ $= \ldots =$ НОД$(a-b\cdot q, b)$.

Например: НОД$(57,6) =$ НОД$(57-6,6) = \ldots =$ $=$ НОД$(57-6\cdot 9, 6) =$ НОД$(3,6) = 3$.

Теорема 4. Если $a = q\cdot b + r$, где $a,b,q,r \in \mathbb{Z}$ и $a^2+b^2 \neq 0$, то НОД$(a,b) =$ НОД(b,r).

Например: так как $57=6\cdot 9+3$, то НОД$(57,9)=$НОД$(9,3)=3$.

Рассмотрим, как данные теоремы могут помочь найти наибольший общий делитель чисел a и b (пусть для определенности $a > b$).

1. Разделим a на b с остатком: $a = b\cdot q_1 + r_1$,
   тогда НОД$(a,b) =$ НОД(b,r_1).
   Если $r_1 = 0$, то поиск закончен,
   так как НОД$(b,r_1) =$ НОД$(b,0) = b$.

2. Если $r_1 \neq 0$, то тогда разделим b на r_1 с остатком, тогда $b = r_1\cdot q_2 + r_2$, т. е. НОД$(b,r_1) =$ НОД(r_1,r_2).
   Если $r_2 = 0$, то НОД$(b,r_1) =$ НОД$(r_1,r_2) = r_1$.

3. Если же $r_2 \neq 0$, то алгоритм поиска нужно продолжить.
   Учитывая, что $b > r_1 > r_2 > \ldots > r_n \geqslant 0$, то этот процесс поиска конечен.

   Описанный процесс поиска наибольшего общего делителя двух натуральных чисел a и b имеет название — алгоритм Евклида.

Пример. Найдите НОД$(2520, 1968)$, используя алгоритм Евклида.

$$\begin{array}{r|l} -\,2520 & \underline{1968} \\ \underline{1968} & 1 \\ 552 & \end{array}$$ значит $2520 = 1968\cdot 1 + 552$.

$$\begin{array}{r|l} -\,1968 & \underline{552} \\ \underline{1656} & 3 \\ 312 & \end{array}$$ значит $1968 = 552\cdot 3 + 312$.

$$-\begin{array}{r|l} 552 & \underline{312} \\ \underline{312} & 1 \\ 240 & \end{array} \quad \text{значит } 552 = 312\cdot 1 + 240.$$

$$-\begin{array}{r|l} 312 & \underline{240} \\ \underline{240} & 1 \\ 72 & \end{array} \quad \text{значит } 312 = 240\cdot 1 + 72.$$

$$-\begin{array}{r|l} 240 & \underline{72} \\ \underline{216} & 3 \\ 24 & \end{array} \quad \text{значит } 240 = 72\cdot 3 + 24.$$

$$-\begin{array}{r|l} 72 & \underline{24} \\ \underline{72} & 3 \\ 0 & \end{array} \quad \text{значит } 72 = 24\cdot 3.$$

Тогда $\text{НОД}\,(2520, 1968) = 24$.

С другой стороны, исследуя правила получения остатков через исходные значения a и b, получим следующие ряды равенств:

$$\begin{aligned} 552 &= 2520 - 1968\cdot 1 \\ 312 &= 1968 - 312\cdot 1 \\ 72 &= 312 - 240\cdot 1 \\ 24 &= 240 - 72\cdot 3, \end{aligned}$$

следовательно, можно представить НОД в несколько ином виде, введя отсчет в обратном порядке:

$$\underline{\text{НОД}\,(2520, 1968) = 24} = 240 - 72\cdot 3 = 240 - (312 - 240\cdot 1)\cdot 3 =$$
$$= 240\cdot 4 - 312\cdot 3 = (552 - 312\cdot 1)\cdot 4 - 312\cdot 3 = 552\cdot 4 - 312\cdot 7 =$$
$$= 552\cdot 4 - (1968 - 552\cdot 3)\cdot 7 = 552\cdot 25 - 1968\cdot 7 =$$
$$= (2520 - 1968\cdot 1)\cdot 25 - 1968\cdot 7 = \underline{2520\cdot 25 - 1968\cdot 32} = 24.$$

Таким образом, $2520\cdot 25 + 1968\cdot(-32) = 24$, значит, существуют такие значения u и v, что $a\cdot u + b\cdot v = d$, и $\text{НОД}\,(a, b) = d$. Тогда $a = 2520$, $b = 1968$, $u = 25$, $v = -32$, $d = 24$.

Теорема. Если $\text{НОД}\,(a, b) = d$, то существуют такие числа $u, v \in \mathbb{Z}$, такие что $\boxed{a\cdot u + b\cdot v = d}$.

Следствие. Если числа a и b взаимно простые, т. е. $(a, b) = 1$, то существуют такие числа $u, v \in \mathbb{Z}$, что $a\cdot u + b\cdot v = 1$.

Например: $2520\cdot u + 1968\cdot v = 24$, так как $(2520, 1968) = 24$, значит, можно разделить обе части уравнения на 24:

$105\cdot u + 82\cdot v = 1$, где $(105, 82) = 1$.

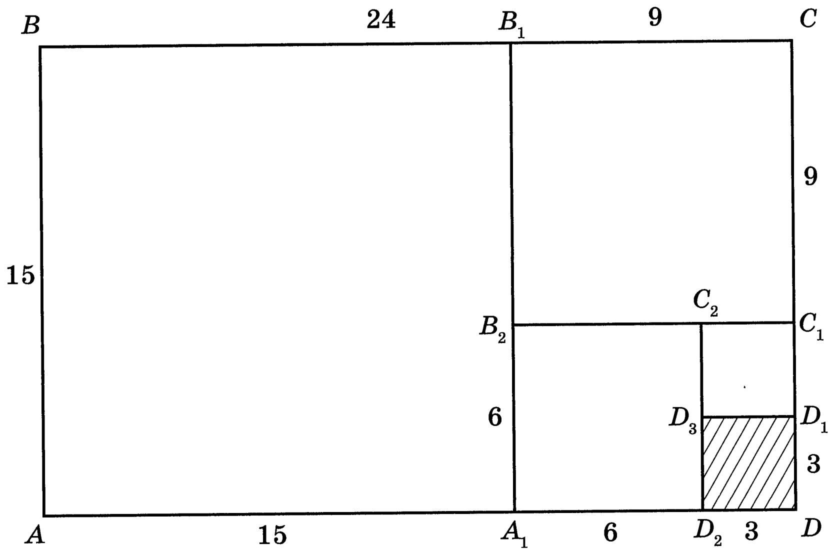
Ранее значения u и v были найдены:

$105\cdot 25 + 82\cdot(-32) = 1$.

Такой способ нахождения u и v использует расширенный алгоритм Евклида.

Примечание. Для уравнения первой степени с двумя неизвестными u и v $2520u+1968v=24$ пара целых чисел $(25;-32)$ есть одно из *частных* решений ($u = 25$, $v = -32$). Позже будет доказано, что если есть частное решение уравнения такого вида, то решений существует бесконечно много.

Рассмотрим метод-алгоритм Евклида, который создавался с позиции поиска соизмеримых геометрических отрезков, т. е. *меры* — отрезка, который целое число раз укладывается, в данном случае, в стороны прямоугольника.



Дано: прямоугольник $ABCD$, где $AB = 15$, $BC = 24$.

а) На большей стороне AD отметим $AA_1 = AB$, построим квадрат ABB_1A_1.

б) На большей стороне прямоугольника A_1B_1CD, т. е. на стороне DC отложим отрезок $CC_1 = B_1C$, получим квадрат $B_2B_1CC_1$.

в) На большей стороне прямоугольника $A_1B_2C_1D$, т. е. на стороне A_1D отложим отрезок $A_1D_2 = A_1B_2$, получим квадрат $A_1B_2C_2D_2$.

г) На большей стороне прямоугольника $D_2C_2C_1D$, т. е. на стороне D_2C_2 отложим отрезок $D_3D_2 = D_2D$, получим квадрат $D_2D_3D_1D$.

Т. е. тем самым найдем ту самую *меру* — квадрат 3×3, который целое число (раз) укладывается в исходном прямоугольнике $ABCD$. Легко посчитать, что квадрат $D_2D_3D_1D$ в 40 раз меньше $ABCD$.

Решение линейных уравнений в целых числах

Подобными задачами занимались выдающиеся древнегреческие математики: Пифагор (VI в. до н. э.), Диофант Александрийский (III в. до н. э.), а также гениальные европейские математики П. Ферма (XVII в.), Л. Эйлер (XVII в.) и другие. Но и на сегодня нет общих методов решения.

Рассмотрим диофантовы уравнения *первой* степени вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $a^2 + b^2 \neq 0$ (это значит, что коэффициенты a и b одновременно ненулевые).

Вопрос: как по коэффициентам диофантовых уравнений определить, имеет ли оно целочисленные решения? Если же решение есть, то каков алгоритм его поиска?

Теорема 1. Уравнение $ax+by=c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $a^2+b^2 \neq 0$, имеет решения в целых числах только если $c \,\vdots\, \text{НОД}\,(a, b)$.

Докажем это.

Пусть $(x_0; y_0)$ — пара решений данного уравнения,
где $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, т. е. $ax_0 + by_0 = c$.
Тогда $a \,\vdots\, \text{НОД}\,(a, b)$ и $b \,\vdots\, \text{НОД}\,(a, b)$.
Значит, $ax_0 \,\vdots\, \text{НОД}\,(a, b)$ и $by_0 \,\vdots\, \text{НОД}\,(a, b)$.
Следовательно, $c = (ax_0 + by_0) \,\vdots\, \text{НОД}\,(a, b)$,
т. е. если $c \,\vdots\, \text{НОД}\,(a, b)$, то уравнение имеет решение в целых числах. Укажем алгоритм этого решения.

Теорема 2. Если $\text{НОД}\,(a, b) = 1$ и пара $(x_0; y_0)$ — произвольное *частное* целочисленное решение уравнения $ax + by = c$, то все решения этого уравнения в целых числах имеют вид $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$, где t принимает всевозможные целые значения.

Итак, необходимо доказать, что:

а) если пара $(x_0; y_0)$ — некоторое целочисленное частное решение уравнения $ax+by=c$, то x и y можно представить в виде: $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$, где $t \in \mathbb{Z}$;

б) для любого $t \in \mathbb{Z}$ пара $(x_0 - bt; y_0 + at)$ есть решение уравнения $ax + by = c$.

Доказательство

а) Так как пара $(x_0; y_0)$ есть решение исходного уравнения, то $\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ ax + by = c \end{cases}$,

тогда $ax_0 + by_0 = ax + by$, значит $a(x_0 - x) = b(y - y_0)$.

Учитывая, что НОД $(a, b) = 1$, получаем

$\begin{cases} (x_0 - x) \vdots b \\ (y - y_0) \vdots a \end{cases}$, т. е. имеем $\begin{cases} x_0 - x = bt \\ y - y_0 = at \end{cases}$, или $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$.

б) Подставим пару $(x_0 - bt; y_0 + at)$ в исходное уравнение, получим $a(x_0 - bt) + b(y_0 + at) = ax_0 - \underline{abt} + by_0 + \underline{abt} =$ $= ax_0 + by_0 = c$.

Значит, данная пара — решение уравнения $ax + by$, что и следовало доказать. Следовательно, все решения уравнения $ax + by = c$ в целых числах имеют вид: $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$ для любого $t \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что решение диофантовых уравнений тесным образом связано с решением сравнений с неизвестными. Действительно, уравнение $ax + by = c$ можно записать, как $ax \equiv c \pmod{b}$ или $by \equiv c \pmod{a}$.

Пример. $3x + 4y = 5$.

$3x \equiv 5 \pmod{4}$.

Очевидно, что при $x_0 = 3$ $\quad 3 \cdot 3 \equiv 5 \pmod{4}$ — верно.

Значит, $3 \cdot 3 + 4 \cdot y_0 = 5$, тогда $y_0 = -1$, т. е. пара $(3; -1)$ есть одно из частных решений.

Следовательно, все решения уравнения $3x + 4y = 5$ в целых числах имеют вид:

$\begin{cases} x = 3 - 4k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$, для любых $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим применение методов решения диофантовых уравнений к решению экономических задач.

Задача 1. Со склада вывезли 100 бутылок водки и вина, причем в одном ящике помещается либо 7 бутылок водки, либо 3 бутылки вина. Бутылка вина на складе стоит 15$, а бутылка водки — 10$. На какую максимальную сумму можно вывезти товар?

Пусть x — количество ящиков с бутылками водки, а y — количество ящиков с бутылками вина.

$7x$ — число бутылок водки,

$3y$ — число бутылок вина.

Число всех бутылок $7x + 3y = 100$,

тогда $3y \equiv 100 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$, т. е. $3y \equiv 2 \pmod 7$.

Очевидно, что при $y_0 = 3 \quad 9 \equiv 2 \pmod 7$, что верно,

тогда $7 \cdot x_0 + 3 \cdot 3 = 100$, т. е. $x_0 = 13$.

Следовательно, пара $(13; 3)$ — одно из частных решений уравнения $7x + 3y = 100$.

Тогда $\begin{cases} x = 13 - 3k \\ y = 3 + 7k \end{cases}$ — все решения,

но по условию $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

Проверим, при каких значениях k возможны пары, соответствующие условиям.

$k = 0$ $(13; 3)$ — частное решение было найдено ранее
$k = 1$ $(10; 10)$
$k = 2$ $(7; 17)$
$k = 3$ $(4; 24)$
$k = 4$ $(1; 31)$

Это все возможные пары решений, при которых $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

(при $k = -1 \quad y < 0$; при $k = 5 \quad x < 0$).

Отметим далее, что 10\$ — стоимость бутылки водки, 15\$ — стоимость бутылки вина, следовательно,

$f(x_0, y_0) = 7 \cdot x_0 \cdot 10 + 3 \cdot y_0 \cdot 15$ — функция стоимости товара, тогда

$f(13,3) = 7 \cdot 13 \cdot 10 + 3 \cdot 3 \cdot 15 = 1045,$

$f(10,10) = 7 \cdot 10 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 15 = 1150,$

$f(7,17) = 7 \cdot 7 \cdot 10 + 3 \cdot 17 \cdot 15 = 1255,$

$f(4,24) = 7 \cdot 4 \cdot 10 + 3 \cdot 24 \cdot 15 = 1360,$

$f(1,31) = 7 \cdot 1 \cdot 10 + 3 \cdot 31 \cdot 15 = \underline{1465}.$

Итак, при полном комплекте выгодно вывезти 31 ящик вина и один ящик водки, выручив за это 1465\$. При неполном комплекте выгодно вывезти 33 ящика вина и одну бутылку водки, тогда максимальная стоимость вывезенного товара составит $33 \cdot 3 \cdot 15 + 1 \cdot 1 \cdot 10 = \underline{\underline{1495}}$.

Вопрос состоит в том, а выгодно ли это магазину, если скорость продажи водки существенно выше. Но это уже другой разговор.

Задача 2. На 100 долларов купили 100 открыток. При этом поздравительные открытки стоят 5\$ за открытку, художественные 3\$ за открытку, почтовые 1\$ за 3 открытки. Какие варианты покупки полного набора открыток возможны?

Обозначим за: x — количество поздравительных открыток, y — количество художественных открыток, z — количество почтовых открыток. Тогда

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \text{ — количество всех открыток,} \\ 5x + 3y + \dfrac{z}{3} = 100 \text{ — стоимость всех выбранных открыток,} \end{cases}$$

т. е. $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 15x + 9y + z = 300 \end{cases}$,

Получили систему двух уравнений с тремя неизвестными.

Исключим z из системы, получим $100-(x+y)=300-(15x+9y)$, т. е. $14x + 8y = 200$ или $7x + 4y = 100$.

Теперь решим данное диофантово уравнение.

$7x \equiv 100 \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4$, т. е. $7x \equiv 0 \pmod 4$.

Так как $(7,4) = 1$, то $x \equiv 0 \pmod 4$.

Очевидно, что $x_0 = 4$ — решение. Тогда

$7 \cdot 4 + 4 \cdot y_0 = 100; \quad y_0 = 18.$

Следовательно, $(4;18)$ — частное решение уравнения $7x+4y= = 100$. Значит, все решения данного уравнения в целых числах имеют вид $\begin{cases} x = 4 - 4k \\ y = 18 + 7k \end{cases}$.

Найдем остальные частные решения, соответствующие условиям задачи.

Так как $\begin{cases} 4 - 4k > 0 \\ 18 + 7k > 0 \end{cases}$, то $\begin{cases} k < 1 \\ k > -2\frac{4}{7} \end{cases}$.

При $k = 0 \quad (4;18)$
При $k = -1 \quad (8;11)$.
При $k = -2 \quad (12;4)$

Вычислим значение z, используя уравнение $x + y + z = 100$.

Получим тройки чисел: $\begin{matrix} (4;18;78) \\ (8;11;81). \\ (12;4;84) \end{matrix}$

Учитывая допустимое значение z, получим только три способа, так как в содержательном смысле $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Ответ: при данных условиях задачи возможны только три варианта покупок $(4;18;78), (8;11;81), (12;4;84)$, или:

вариант I: 4 поздравительные открытки,
18 художественных открыток,
78 почтовых открыток;

вариант II: 8 поздравительных открыток,
11 художественных открыток,
81 почтовая открытка;

вариант III: 12 поздравительных открыток,
4 художественные открытки,
88 почтовых открыток.

Возможны и другие области применения. Например, рассмотрим деление углов на равные части, используя методы решения диофантовых уравнений.

Задача 3. Дан угол 13°. При помощи циркуля и линейки разделите его на тринадцать равных частей.

Используя построение равностороннего треугольника, можно, проводя биссектрису, медиану и высоту, построить угол 30°.
Рассмотрим диофантово уравнение $13x + 30y = 1$,
тогда $13x \equiv 1 \pmod{30}$.
При $x_0 = 7 \quad 91 \equiv 1 \pmod{30}$, что верно,
значит $13 \cdot 7 + 30y_0 = 1$, т. е. $30y_0 = 1 - 13 \cdot 7, \quad y_0 = -3$.
Следовательно, $(7; -3)$ — частное решение, и $1 = 13 \cdot 7 - 30 \cdot 3$.
Переводя равенство в градусы, получим:
$1^\circ = 13^\circ \cdot 7 - 30^\circ \cdot 3$, значит, чтобы построить угол 1°, необходимо 7 раз отложить угол 13° и вычесть 3 раза угол 30°. Затем нужно тринадцать раз отложить от любой стороны данного угла 13° угол 1°.
Итак, способ деления данного угла 13° на тринадцать равных частей, используя диофантово уравнение, предложен.

Тренировочная работа 7

Вариант I

1. Решите диофантовы уравнения:
   а) $3x - 4y = 29$;
   б) $11x + 3y = 200$;
   в) $91x - 65y = 42$.
2. Задача I

   Библиотека купила на 20 рублей 20 книг трех видов: по 3 рубля, по 2 рубля и по 50 копеек. Сколько книг каждого вида купила библиотека?
3. Задача II

   В шахматном турнире участвовали 2 школьника 7 класса и несколько школьников 8 класса. Каждый из восьмиклассников набрал равное число очков. Сколько школьников 8 класса участвовало в турнире, если два школьника из 7 класса в сумме за турнир набрали 8 очков?

Вариант II

1. Решите диофантовы уравнения:
   а) $6x + 5y = 101$;
   б) $5x + 7y = 112$;
   в) $60x - 77y = 1$.
2. Задача I

   В комнате 14 столов с одним, двумя, тремя и четырьмя ящиками. Всего в столах 33 ящика. Известно, что столов с одним ящиком столько, сколько столов с двумя и тремя ящиками. Сколько столов с одним, двумя, тремя, четырьмя ящиками находится в комнате по отдельности?
3. Задача II

   Иван-дурачок имеет два волшебных меча. Один из них может отрубить Змею-Горынычу за один удар 21 голову, а второй меч за один удар отрубает 4 головы, но тогда у Змея-Горыныча сразу отрастет 2015 голов. Может ли Иван отрубить все головы, если в наличии у Змея-Горыныча было 100 голов?

4. Задача III*

Группа из n мудрецов получают колпаки с номерами на них от 1 до n, номера могут повторяться, какие-то номера могут быть пропущены. Каждый мудрец может видеть все номера, кроме своего. Каждый мудрец пишет на своем листке, какое число, по его мнению, на его шапке (чужих листков он не видит). Если есть хоть одно число, неважно у кого, которое окажется верным, то вся группа победила. Они могут вначале договориться о методе поиска. Что это за метод? Приведите ваши соображения и алгоритм решения данной задачи.

I. Решите задачу в общем виде. Для контроля в каждом варианте предложен свой набор чисел на колпаках мудрецов.

Вариант I
Выясните, какой из мудрецов даст правильный ответ, если числа на колпаках мудрецов:
2, 5, 6, 8, 3, 4, 7, 8, 1.

Вариант II
Выясните, какой из мудрецов даст правильный ответ, если числа на колпаках мудрецов:
7, 5, 5, 8, 3, 7, 7, 4.

Напомним еще раз, каждый мудрец видит все номера на колпаках, кроме своего. Общее решение этой задачи будет рассмотрено отдельно после разбора решения первых двух задач обоих вариантов.

II. Учтем условия предыдущей задачи. На электронном тотализаторе проводится игра в режиме реального времени: принимаются ставки на того из мудрецов (имеется в виду номер мудреца), кто правильно решит задачу. Известно, сколько мудрецов и какова сумма всех чисел на колпаках мудрецов. Денежный приз получает тот, кто правильно и быстрее ответит на вопрос. Каждые пять минут количество мудрецов и суммы чисел на колпаках мудрецов изменяются.

Вариант I

Выясните, какой из мудрецов даст правильный ответ, если:

число мудрецов 13;

сумма чисел на колпаках всех мудрецов 94.

Вариант II

Выясните, какой из мудрецов даст правильный ответ, если:

число мудрецов 17;

сумма чисел на колпаках всех мудрецов 165.

Решение тренировочной работы 7

Вариант I

1. Решите диофантовы уравнения:

а) $3x - 4y = 29$.

Найдем частное решение.

$3x \equiv 29 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$, т. е. $3x \equiv 1 \pmod 4$.

Пусть $x = 1$. Тогда $3 \cdot 7 \equiv 1 \pmod 4$ — верно.

Значит, $x_0 = 7$, тогда $3 \cdot 7 - 4 \cdot y_0 = 29$.

$y_0 = -2$, следовательно $\begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$.

Ответ: $(7 + 4t, -2 + 3t)$, где $t \in \mathbb{Z}$.

б) $11x + 3y = 200$.

Найдем частное решение.

$11x \equiv 200 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$, т. е. $11x \equiv 2 \pmod 3$.

Пусть $x = 1$. Тогда $11 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 3$ — верно.

Значит, $x_0 = 1$, тогда $11 \cdot 1 + 3y_0 = 200$, т. е. $y_0 = 63$,

тогда $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 63 + 11t \end{cases}$.

Ответ: $(1 - 3t; 63 + 11t)$, где $t \in \mathbb{Z}$.

в) $91x - 65y = 42$.

Так как НОД$(91, -65) = 13$ и $42 \not\vdots\, 13$, то диофантово уравнение решения не имеет.

2. Задача I

Библиотека купила на 20 рублей 20 книг трех видов: по 3 рубля, по 2 рубля и по 50 копеек. Сколько книг каждого вида купила библиотека?

Пусть x — количество книг по 3 рубля, y — количество книг по 2 рубля, z — количество книг по 50 копеек. Тогда

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ 3x+2y+\dfrac{1}{2}z=20 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y+z=20 \\ 6x+4y+z=40 \end{cases}; \quad (\text{II}-\text{I})$$

$$\begin{cases} 5x+3y=20 \\ x+y+z=20 \end{cases}.$$

Решим диофантово уравнение: $5x+3y=20$,

значит $5x \equiv 20 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$.

Найдем частное решение.

Очевидно, что $x_0 = 1$. Значит, $5 \cdot 1 + 3 \cdot y_0 = 20$, тогда $y_0 = 5$, следовательно, $1+5+z=20$, получим $z=14$.

Ответ: библиотека купила 1 книгу по 3 рубля, 5 книг по 2 рубля и 14 книг по 50 копеек.

3. Задача II

В шахматном турнире участвовали 2 школьника 7 класса и несколько школьников 8 класса. Каждый из восьмиклассников набрал равное число очков. Сколько школьников 8 класса участвовало в турнире, если два школьника из 7 класса в сумме за турнир набрали 8 очков?

Положим за x число восьмиклассников, тогда общее число участников турнира равно $x+2$.

За y обозначим общее число очков, набранных всеми участниками турнира. Учтем, что два участника партии за одну встречу могут в сумме набрать только одно очко.

Учитывая, что общее число очков, которое могут получить все участники турнира, равно числу встреч, получим, что $y = \dfrac{(x+2)(x+1)}{2}$ есть число очков после всех встреч.

Учтем, что число восьмиклассников по смыслу условия задачи должно быть больше трех. Известно, что семиклассники, играя, получили 8 очков. Значит, чтобы у восьмиклассников было равное число очков, это число очков должно быть кратно числу восьмиклассников.

Действительно, $y-8=\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}-8$ — число очков, полученных всеми восьмиклассниками при игре между собой. Следовательно:

$\left(\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}-8\right)\vdots\, x$, т. е. $\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}-8=tx$,

или $(x+2)(x+1)-16=2tx$,

что означает $(x+2)(x+1)-16\equiv 0 \pmod x$.

Тогда $x^2+3x+2\equiv 16 \pmod x$.

С учетом свойства сравнений $x\equiv 0 \pmod x$;

$3x\equiv 0 \pmod x$; $\quad x^2\equiv 0 \pmod x$; $\quad x^2+3x\equiv 0 \pmod x$.

Тогда из $x^2+3x+2\equiv 16 \pmod x$ следует, что $2\equiv 16 \pmod x$.

Так как по условию задачи $x>3$, то:

а) при $x \not\vdots\, 2$ по свойству сравнений ④ из $2\equiv 16 \pmod x$ получим:

$1\equiv 8 \pmod x$, тогда $0\equiv 7 \pmod x$, значит $x=7$.

Таблица шахматного турнира при двух семиклассниках и семи восьмиклассниках подтверждает справедливость данного решения.

	7_1	7_2	8_1	8_2	8_3	8_4	8_5	8_6	8_7	число очков
7_1	■	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	4
7_2	1/2	■	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	4
8_1	1/2	1/2	■	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	4
8_2	1/2	1/2	1/2	■	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	4
8_3	1/2	1/2	1/2	1/2	■	1/2	1/2	1/2	1/2	4
8_4	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	■	1/2	1/2	1/2	4
8_5	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	■	1/2	1/2	4
8_6	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	■	1/2	4
8_7	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	■	4

б) при $x\,\vdots\, 2$, следует что $x=2\cdot k$, где $k\in\mathbb{Z}$, тогда $2\equiv 16 \pmod{2\cdot k}$.

По второму свойству сравнений тогда $0\equiv 14 \pmod{2\cdot k}$, значит $14=2\cdot k$, получили $k=7$. Следовательно, $x=14$.

Таблица шахматного турнира при двух семиклассниках и четырнадцати восьмиклассниках подтверждает справедливость данного решения.

	7_1	7_2	8_1	8_2	8_3	8_4	8_5	8_6	8_7	8_8	8_9	8_{10}	8_{11}	8_{12}	8_{13}	8_{14}	число очков
7_1		1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	0	4
7_2	1/2		0	0	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	0	0	1/2	1/2	1/2	4
8_1	1/2	1		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_2	1/2	1	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_3	1/2	1	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_4	1	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_5	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_6	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_7	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_8	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_9	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_{10}	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1/2	8
8_{11}	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	8
8_{12}	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	8
8_{13}	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		1/2	8
8_{14}	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2		8

Ответ: в турнире по шахматам участвовало 7 или 14 восьмиклассников.

Примечание. В условии задачи не оговаривается требование того, чтобы и семиклассники набрали одинаковое число очков при встречах со всеми участниками турнира. В приведенных таблицах встреч это требование выполняется.

Вопрос: возможен ли на прежних условиях задачи такой шахматный турнир, в котором

а) семиклассники набрали бы разное число очков при участнии в нем семи восьмиклассников;

б) семиклассники набрали бы разное число очков при участнии в нем четырнадцати восьмиклассников?

Подумайте и ответьте: если да, то приведите пример в виде таблицы соревнований; если нет, то объясните, почему это невозможно.

Вариант II

1. Решите диофантовы уравнения:

а) $6x + 5y = 101$.

Найдем вначале частное решение.

$6x \equiv 101 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$, т. е. $6x \equiv 1 \pmod 5$.

Тогда $x_0 = 1$.

Подставив в исходное уравнение значение x_0, получим $6 \cdot 1 + 5 \cdot y_0 = 101$.

Значит, $y_0 = 19$, следовательно, $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 19 + 6t \end{cases}$.

Ответ: $(1 - 5t, 19 + 6t)$, где любое $t \in \mathbb{Z}$.

б) $5x + 7y = 112$.

Найдем вначале частное решение.

$5x \equiv 112 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$,

тогда $x_0 = 7$, значит, $5 \cdot 7 + 7 \cdot y_0 = 112$, т. е. $y_0 = 11$.

Следовательно, $\begin{cases} x = 7 - 7t \\ y = 11 + 5t \end{cases}$.

Ответ: $(7 - 7t; 11 + 5t)$, где любое $t \in \mathbb{Z}$.

в) $60x - 77y = 1$.

Найдем вначале частное решение.

$60x \equiv 1 \pmod{77} \equiv 78 \pmod{77}$, тогда по свойствам сравнений $10x \equiv 13 \pmod{77}$.

Следовательно, $x_0 = 9$, так как $90 \equiv 13 \pmod{77}$.

Получим $60 \cdot 9 - 77 \cdot y_0 = 1$, т. е. $77y_0 = 539$, $y_0 = 7$.

Итак, $(9; 7)$ — частное решение уравнения

$60x - 77y = 1$, тогда $\begin{cases} x = 9 + 77t \\ y = 7 + 60t \end{cases}$.

Ответ: $(9 + 77t; 7 + 60t)$, где любое $t \in \mathbb{Z}$.

2. Задача I

В комнате 14 столов с одним, двумя, тремя и четырьмя ящиками. Всего в столах 33 ящика. Известно, что столов с одним ящиком столько, сколько столов с двумя и тремя ящиками. Сколько столов с одним, двумя, тремя, четырьмя ящиками находится в комнате по отдельности?

Пусть: x — количество столов с одним ящиком, y — количество столов с двумя ящиками, z — количество столов с тремя ящиками, t — количество столов с четырьмя ящиками.

Тогда, используя первое условие, получим $x+y+z+t=14$.

С другой стороны, по второму условию

$x\cdot 1+y\cdot 2+z\cdot 3+t\cdot 4=33$, т. е. $x+2y+3z+4t=33$.

Так как по третьему условию $x=y+z$, то $3y+4z+4t=33$.

Решим систему $\begin{cases} x+y+z+t=14 & \cdot 4 \\ 3y+4z+4t=33 \end{cases}$,

т. е. $\begin{cases} 4x+4y+4z+4t=56 \\ 3y+4z+4t=33 \end{cases}$ (I−II), значит, $4x+y=23$.

Очевидно, что частное решение $x_0=5$ и $y_0=3$.

Так как $x=y+z$, то $z_0=2$, а значит $5+3+2+t_0=14$, т. е. $t_0=4$.

Проверим верность второго условия: $x+2y+3z+4t=33$, тогда $5+2\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 4=33$, что верно.

Ответ: пять столов с одним ящиком, три стола с двумя ящиками, два стола с тремя ящиками, четыре стола с четырьмя ящиками.

3. Задача II

Иван-дурачок имеет два волшебных меча. Один из них может отрубить Змею-Горынычу за один удар 21 голову, а второй меч за один удар отрубает 4 головы, но тогда у Змея-Горыныча сразу отрастет 2015 голов. Может ли Иван отрубить все головы, если в наличии у Змея-Горыныча было 100 голов?

Обозначим за x — число ударов вторым мечом, y — число ударов первым мечом.

Сначала у Змея-Горыныча было 100 голов, за каждый удар вторым мечом у него отрубается 4 и при этом отрастает 2015 голов. Тогда общее число голов после x ударов можно представить в виде: $100 + 2015x - 4x$, где $x \in \mathbb{Z}$.

Чтобы ответить на вопрос: «Может ли Иван отрубить все головы Змею-Горынычу?», необходимо найти число x, при котором число голов у Змея-Горыныча будет кратно 21, тогда за y ударов первым мечом Иван срубит все оставшиеся головы Змею-Горынычу.

Представим это в виде диофантова уравнения, через x и y: $100 + 2011x = 21y$.

Полученное диофантово уравнение приведем к более привычному виду: $2011x - 21y = -100$.

Так как $(2011, -21) = 1$, то $\text{НОД}(2011, -21) = 1$.

По теореме 1 (стр. 277) так как $-100 \vdots \text{НОД}(2011, -21)$, то диофантово уравнение $2011x - 21y = -100$ имеет решение.

Для решения рассмотрим сравнение:

$2011x \equiv -100 \pmod{21} \equiv -100 + 21 \cdot 4 \pmod{21}$,

т. е. $2011x \equiv -16 \pmod{21}$.

Учитывая, что $2011 = 21 \cdot 95 + 16$ получим

$(21 \cdot 95 + 16)x \equiv -16 \pmod{21}$.

Используя свойства сравнения, получаем:

$16x \equiv -16 \pmod{21}$.

Так как $(16, 21) = 1$, то $x \equiv -1 \pmod{21}$

или $x + 1 \equiv 0 \pmod{21}$.

Значит $x + 1 = 21t$, тогда $x = -1 + 21t$ при любом $t \in \mathbb{Z}$.

Пусть $t = 1$, следовательно, $x_0 = 20$.

Тогда $2011 \cdot 20 - 21y_0 = -100$,

т. е. $21y_0 = 2011 \cdot 20 + 100 = 40\,320$; $\quad 40\,320 : 21 = 1920$.

Итак, $y_0 = 1920$, значит $(20; 1920)$ — частное решение.

Проверим:

$2011 \cdot 20 - 21 \cdot 1920 = -100$; $\quad 40\,220 - 40\,320 = -100$.

Ответ: да, Иван-дурачок может двумя волшебными мечами отрубить все головы Змея-Горыныча.

Рассмотрим решение задачи III* для обоих вариантов.
I. Группа из n мудрецов получают колпаки с номерами на них от 1 до n, номера могут повторяться, какие-то номера могут быть пропущены. Каждый мудрец может видеть все номера, кроме своего. Каждый мудрец пишет на своем листке, какое число, по его мнению, на его шапке (чужих листков он не видит). Если есть хоть одно число, неважно у кого, которое окажется верным, то вся группа победила. Они могут вначале договориться о методе поиска. Что это за метод? Приведите ваши соображения и алгоритм решения данной задачи.

а) *Идеология решения*

Группа договаривается между собой о том, что каждый мудрец получает *личный* номер от 0 до $n-1$, у каждого *другой* личный номер. Таким образом, *все личные номера задействованы.*

Затем во время испытания каждый мудрец *предполагает*, что он знает сумму чисел на всех n колпаках, включая его собственный, и осуществляет сравнение этой суммы по модулю n (то есть ищет остаток от деления суммы по модулю n), и этот остаток — его личный номер (например, k).

Тогда, увидев числа на всех колпаках, кроме своего, и предполагая, что сравнение сумм чисел на всех колпаках по модулю n включая свой, равна k, он может посчитать предполагаемое число на своем колпаке.

Сложив числа на всех колпаках, кроме своего, он считает, сколько надо добавить, чтобы полная сумма имела остаток от деления, равный k, и это число пишется в качестве ответа.

Поскольку у полной суммы в любом случае есть какой-то остаток от деления на n, и это число от 0 до $n-1$, то всегда есть человек, чей личный номер совпадает с остатком. Вот именно он и даст правильный ответ на вопрос о том, какой номер у него самого на колпаке.

б) *Алгоритм действия каждого участника-мудреца для успешного решения задачи*

1. Перед испытанием заранее получить свой личный номер k, договорившись об этом с другими участниками. Теперь у каждого из n участников есть свой, личный номер от 0 до $n - 1$. Таким образом, все числа от 0 до $n-1$ обязательно будут задействованы, и только один раз.

2. Во время испытания необходимо сложить числа на всех колпаках, которые данный мудрец видит, и посчитать остаток от деления этой суммы на n. Назовем этот остаток s.

3. Затем нужно посчитать разность $k-s$. Если получится отрицательное число или ноль, то прибавить к нему n. Результат и написать на своем листке.

в) *Решение задачи III для варианта I*

Количество участников $n = 9$. Пусть личные номера мудрецов соответствуют данному порядку чисел на колпаках:

Личные номера мудрецов	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Числа на колпаках мудрецов	2	5	6	8	3	4	7	8	1

Мудрец с личным номером $k = 0$ видит:

	5	6	8	3	4	7	8	1

Сумма, увиденная им, равна 42, тогда $42 \equiv 6 \pmod 9$, так как $42 = 9 \cdot 4 + 6$. Следовательно, значение $s = 6$.

Найдем разность $k - s = 0 - 6 = -6$, получили отрицательное число, поэтому к разности нужно прибавить $n = 9$, $-6 + 9 = 3$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 3, но число на его колпаке равно 2.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 1$ видит:

2		6	8	3	4	7	8	1

Сумма, увиденная им, равна 39, тогда $39 \equiv 3 \pmod 9$, так как $39 = 9 \cdot 4 + 3$. Следовательно, значение $s = 3$.

Найдем разность $k - s = 1 - 3 = -2$, получили отрицательное число, поэтому к разности нужно прибавить $n = 9$, $-2 + 9 = 7$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 7, но число на его колпаке равно 5.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 2$ видит:

2	5		8	3	4	7	8	1

Сумма, увиденная им, равна 38, тогда $38 \equiv 2 \pmod 9$, так как $38 = 9 \cdot 4 + 2$. Следовательно, значение $s = 2$.

Найдем разность $k - s = 2 - 2 = 0$, получили ноль, поэтому к разности нужно прибавить $n = 9$, $0 + 9 = 9$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 9, но число на его колпаке равно 6.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 3$ видит:

2	5	6		3	4	7	8	1

Сумма, увиденная им, равна 36, тогда $36 \equiv 0 \pmod 9$, так как $36 = 9 \cdot 4$. Следовательно, значение $s = 0$.

Найдем разность $k-s=3-0=3$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавлять $n = 9$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 3, но число на его колпаке равно 8.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 4$ видит:

2	5	6	8		4	7	8	1

Сумма, увиденная им, равна 41, тогда $41 \equiv 5 \pmod 9$, так как $41 = 9 \cdot 4 + 5$. Следовательно, значение $s = 5$.

Найдем разность $k-s=4-5=-1$, получили отрицательное число, поэтому к разности нужно прибавить $n = 9$, $-1+9=8$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 8, но число на его колпаке равно 3.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 5$ видит:

2	5	6	8	3		7	8	1

Сумма, увиденная им, равна 40, тогда $40 \equiv 4 \pmod 9$, так как $40 = 9 \cdot 4 + 4$. Следовательно, значение $s = 4$.

Найдем разность $k-s=5-4=1$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавлять $n = 9$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 1, но число на его колпаке равно 4.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 6$ видит:

2	5	6	8	3	4		8	1

Сумма, увиденная им, равна 37, тогда $37 \equiv 1 \pmod 9$, так как $37 = 9 \cdot 4 + 1$. Следовательно, значение $s = 1$.

Найдем разность $k-s=6-1=5$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавлять $n = 9$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 5, но число на его колпаке равно 7.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 7$ видит:

2	5	6	8	3	4	7		1

Сумма, увиденная им, равна 36, тогда $36 \equiv 0 \pmod 9$, так как $36 = 9 \cdot 4$. Следовательно, значение $s = 0$.

Найдем разность $k - s = 7 - 0 = 7$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавлять $n = 9$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 7, но число на его колпаке равно 8.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 8$ видит:

2	5	6	8	3	4	7	8	

Сумма, увиденная им, равна 43, тогда $43 \equiv 7 \pmod 9$, так как $43 = 9 \cdot 4 + 7$. Следовательно, значение $s = 7$.

Найдем разность $k - s = 8 - 7 = 1$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавлять $n = 9$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 1, и число на его колпаке равно 1.

Ответ верный.

Итак, благодаря правильно разработанному алгоритму коллективных действий, один из мудрецов ответил правильно. Значит, вся группа мудрецов выиграла.

г) *Решение задачи III для варианта II*

Количество участников $n = 8$. Пусть личные номера мудрецов соответствуют данному порядку чисел на колпаках:

Личные номера мудрецов	0	1	2	3	4	5	6	7
Числа на колпаках мудрецов	7	5	5	8	3	7	7	4

Мудрец с личным номером $k = 0$ видит:

	5	5	8	3	7	7	4

Сумма, увиденная им, равна 39, тогда $39 \equiv 7 \pmod 8$, так как $39 = 8 \cdot 4 + 7$. Следовательно, значение $s = 7$.

Найдем разность $k - s = 0 - 7 = -7$, получили отрицательное число, поэтому к разности нужно прибавить $n = 8$,

$-7+8=1$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 1, но число на его колпаке равно 7.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k=1$ видит:

7		5	8	3	7	7	4

Сумма, увиденная им, равна 41, тогда $41 \equiv 1 \pmod 8$, так как $41 = 8 \cdot 5 + 1$. Следовательно, значение $s=1$.

Найдем разность $k-s=1-1=0$, получили ноль, поэтому к разности нужно прибавить $n=8$, $0+8=8$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 8, но число на его колпаке равно 5.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k=2$ видит:

7	5		8	3	7	7	4

Сумма, увиденная им, равна 41, тогда $41 \equiv 1 \pmod 8$, так как $41 = 8 \cdot 5 + 1$. Следовательно, значение $s=1$.

Найдем разность $k-s=2-1=1$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавить $n=8$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 1, но число на его колпаке равно 5.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k=3$ видит:

7	5	5		3	7	7	4

Сумма, увиденная им, равна 38, тогда $38 \equiv 6 \pmod 8$, так как $38 = 8 \cdot 4 + 6$. Следовательно, значение $s=6$.

Найдем разность $k-s=3-6=-3$, получили отрицательное число, поэтому к разности нужно прибавить $n=8$, $-3+8=5$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 5, но число на его колпаке равно 8.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 4$ видит:

7	5	5	8		7	7	4

Сумма, увиденная им, равна 43, тогда $43 \equiv 3 \pmod{8}$, так как $43 = 8 \cdot 5 + 3$. Следовательно, значение $s = 3$.

Найдем разность $k - s = 4 - 3 = 1$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавлять $n = 8$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 1, но число на его колпаке равно 3.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 5$ видит:

7	5	5	8	3		7	4

Сумма, увиденная им, равна 39, тогда $39 \equiv 7 \pmod{8}$, так как $39 = 8 \cdot 4 + 7$. Следовательно, значение $s = 7$.

Найдем разность $k - s = 5 - 7 = -2$, получили отрицательное число, поэтому к разности нужно прибавить $n = 8$, $-2 + 8 = 6$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 6, число на его колпаке равно 7.

Ответ неверный.

Мудрец с личным номером $k = 6$ видит:

7	5	5	8	3	7		4

Сумма, увиденная им, равна 39, тогда $39 \equiv 7 \pmod{8}$, так как $39 = 8 \cdot 4 + 7$. Следовательно, значение $s = 7$.

Найдем разность $k - s = 6 - 7 = -1$, получили отрицательное число, поэтому к разности нужно прибавить $n = 8$, $-1 + 8 = 7$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 7, и число на его колпаке равно 7.

Ответ верный.

Мудрец с личным номером $k = 7$ видит:

7	5	5	8	3	7	7	

Сумма, увиденная им, равна 42, тогда $42 \equiv 2 \pmod{8}$, так как $42 = 8 \cdot 5 + 2$. Следовательно, значение $s = 2$.

Найдем разность $k-s=7-2=5$, получили положительное число, поэтому к разности *не нужно* прибавлять $n = 8$. Тогда мудрец запишет на свой листок число 5, но число на его колпаке равно 4.

Ответ неверный.

Итак, благодаря правильно разработанному алгоритму коллективных действий, один из мудрецов ответил правильно. Значит, вся группа мудрецов выиграла.

На вопрос задачи можно ответить сразу. Как? Разберем это в задаче об игре на тотализаторе.

Прежде чем ответить на этот вопрос, рассмотрим предыдущую задачу.

а) Пусть число мудрецов 9, а сумма всех чисел на колпаках равна 44, тогда так как $44 = 9 \cdot 4 + 8$, то $44 \equiv 8 \pmod 9$. Значит, правильный ответ даст мудрец под номером 8, что подтверждается дальнейшим решением.

б) Пусть число мудрецов 8, а сумма всех чисел на колпаках равна 46, тогда так как $46 = 8 \cdot 5 + 6$, то $46 \equiv 6 \pmod 8$. Значит, правильный ответ даст мудрец под номером 6, что подтверждается дальнейшим решением.

Теперь — собственно решение задачи о тотализаторе.

а) Пусть число мудрецов 13, а сумма всех чисел на колпаках равна 94, тогда так как $94=13\cdot 7+3$, то $94\equiv 3 \pmod{13}$. Значит, правильный ответ даст мудрец под номером 3.

б) Пусть число мудрецов 17, а сумма всех чисел на колпаках равна 165, тогда так как $165 = 17 \cdot 9 + 12$, то $165 \equiv 12 \pmod{17}$. Значит, правильный ответ даст мудрец под номером 12.

Примечание. Для читателя, который внимательно рассмотрел и осмыслил приведенную ранее идеологию решения, решение задачи о тотализаторе было очевидным.

Практикум 11 (Упражнения на решение нелинейных уравнений в целых числах)

Одним из методов, помогающих решению уравнений выше первой степени в целых числах, является разложение на множители одной из частей, тем более если другая часть есть целое число.

1. $x^2 - y^2 = 93.$

$(x-y)(x+y) = 93.$

Так как $93 = 1 \cdot 3 \cdot 31$, то, разложив на множители левую часть, имеем все возможные комбинации простых множителей.

а) $\begin{cases} x+y=93 \\ x-y=1 \end{cases}; \quad (47; 46).$

б) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=93 \end{cases}; \quad (47; -46).$

в) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-93 \end{cases}; \quad (-47; 46).$

г) $\begin{cases} x+y=-93 \\ x-y=-1 \end{cases}; \quad (-47; -46).$

д) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=31 \end{cases}; \quad (17; -14).$

е) $\begin{cases} x+y=31 \\ x-y=3 \end{cases}; \quad (17; 14).$

ж) $\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=-31 \end{cases}; \quad (-17; 14).$

з) $\begin{cases} x+y=-31 \\ x-y=-3 \end{cases}; \quad (-17; -14).$

Ответ: $\{(47; 46), (47; -46), (-47; 46), (-47; -46), (17; -14), (17; 14), (-17; 14), (-17; -14)\}.$

2. $xy + 3x - 5y = -3.$

$x(y+3) - 5(y+3) + 15 = -3.$

Итак, $(x-5)(y+3) = -18.$

а) $\begin{cases} x-5=1 \\ y+3=-18 \end{cases}$; $(6;-21).$

б) $\begin{cases} x-5=-18 \\ y+3=1 \end{cases}$; $(-13;-2).$

в) $\begin{cases} x-5=-1 \\ y+3=18 \end{cases}$; $(4;15).$

г) $\begin{cases} x-5=18 \\ y+3=-1 \end{cases}$; $(23;-4).$

д) $\begin{cases} x-5=2 \\ y+3=-9 \end{cases}$; $(7;-12).$

е) $\begin{cases} x-5=-9 \\ y+3=2 \end{cases}$; $(-4;-1).$

ж) $\begin{cases} x-5=-2 \\ y+3=9 \end{cases}$; $(3;6).$

з) $\begin{cases} x-5=9 \\ y+3=-2 \end{cases}$; $(14;-5).$

и) $\begin{cases} x-5=3 \\ y+3=-6 \end{cases}$; $(8;-9).$

к) $\begin{cases} x-5=-6 \\ y+3=3 \end{cases}$; $(-1;0).$

л) $\begin{cases} x-5=-3 \\ y+3=6 \end{cases}$; $(2;3).$

м) $\begin{cases} x-5=6 \\ y+3=-3 \end{cases}$; $(11;-6).$

Ответ: $\{(6;-21), (-13;-2), (4;15), (23;-4), (7;-12),$
$(-4;-1), (3;6), (14;-5), (8;-9), (-1;0), (2;3), (11;-6)\}.$

3. $x^4 - y^4 - 20x^2 + 28y^2 = 107$.

Положим $x^2 = t$, а $y^2 = z$. Тогда $t^2 - 20t - z^2 + 28z = 107$.

Разложим левую часть как многочлен второй степени:

$t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 + z^2 - 28z}$.

Чтобы в квадратном уравнении были целые корни, D должен быть полным квадратом. Для этого необходимо из правой части перенести в левую часть 96.

Получим $t^2 - 20t - z^2 + 28z - 96 = 11$, тогда $t_{1,2} = 10 \pm (z - 14)$, следовательно, $t_1 = z - 4$; $t_2 = 24 - z$.

Значит, $(t - z + 4)(t + z - 24) = 11$. Подставляя вместо t и z их замену через x^2 и y^2, получим

$(x^2 - y^2 + 4)(x^2 + y^2 - 24) = 11$.

Сложив и вычтя уравнения, получим:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = 1 \\ x^2 + y^2 - 24 = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 19 \end{cases}$ $y \notin \mathbb{Z}$ — целых решений нет.

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = -1 \\ x^2 + y^2 - 24 = -11 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = 11 \\ x^2 + y^2 - 24 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \end{cases}$.

г) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = -11 \\ x^2 + y^2 - 24 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 19 \end{cases}$; $y \notin \mathbb{Z}$ — целых решений нет.

Ответ: $\{(2;3), (-2;-3), (4;3), (-4;-3), (-2;3), (2;-3), (-4;3), (4;-3)\}$.

4. $x^2 - y^2 = 6$.

$(x - y)(x + y) = 6$. Число 6 имеет делители $d = 1; 2; 3; 6$.

Возможны только пары $1 \cdot 6$ и $2 \cdot 3$ или $(-1) \cdot (-6)$ и $(-2) \cdot (-3)$. Так как сумма и разность двух чисел $(x - y)$ и $(x + y)$ имеет всегда одну и ту же четность, а в данных парах она разная, то данное уравнение в целых числах решения не имеет.

5. $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169.$

Разложение на линейные множители в данном случае не подходит, так как $D < 0$. Попробуем решить задачу разложения на множители методом выделения полного квадрата.

$x^2 - 4xy + 5y^2 = (x - 2y)^2 + y^2$, тогда $(x - 2y)^2 + y^2 = 13^2$.

Как известно, существует единственная тройка пифагоровых чисел, в которой наибольшим числом есть 13 — это числа 5, 12 и 13.

Комбинируя эти числа с точностью до знака, получим, что возможны только 8 пар. Рассматривая их, получим 8 систем уравнений.

а) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y = 12 \end{cases}$; $(29; 12)$.

б) $\begin{cases} x - 2y = 12 \\ y = 5 \end{cases}$; $(22; 5)$.

в) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ y = -12 \end{cases}$; $(-29; -12)$.

г) $\begin{cases} x - 2y = -12 \\ y = -5 \end{cases}$; $(-22; -5)$.

д) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y = -12 \end{cases}$; $(-19; -12)$.

е) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ y = 12 \end{cases}$; $(19; 12)$.

ж) $\begin{cases} x - 2y = 12 \\ y = -5 \end{cases}$; $(2; -5)$.

з) $\begin{cases} x - 2y = -12 \\ y = 5 \end{cases}$; $(-2; 5)$.

Ответ: $\{(29; 12), (22; 5), (-29; -12), (-22; -5), (-19; -12), (19; 12), (2; -5), (-2; 5)\}$.

6. $2xy + 3y^2 = 24$.

Представим уравнение после преобразований в разных видах, тогда $\begin{cases} y(2x+3y) = 24 \\ 3y^2 = 2(12 - xy) \end{cases}$, следовательно, $\begin{cases} 24 \vdots y \\ y \vdots 2 \end{cases}$, значит, y — четный делитель числа 24,

т. е. $d = \pm 2; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$, но $12 > xy$, значит можно еще сократить пары отбора.

а) $\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$; д) $\begin{cases} y = 6 \\ x = -7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} y = -2 \\ x = -3 \end{cases}$; е) $\begin{cases} y = -6 \\ x = 7 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} y = 4 \\ x = -3 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} y = 12 \\ x = -17 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} y = -4 \\ x = 3 \end{cases}$; з) $\begin{cases} y = -12 \\ x = 17 \end{cases}$.

При $y = \pm 8; \pm 24 \quad x \notin \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{(3;2), (-3;-2), (-3;4), (3;-4), (-7;6), (7;-6), (-17;12), (17;-12)\}$.

7. Решите в целых положительных числах уравнение $(x+y)^2 + (x+y) - 2x = 150$.

Преобразуем уравнение к виду
$y^2 - (1-2x)y + x^2 - 3x - 150 = 0$.

$$y_{1,2} = \frac{1 - 2x \pm \sqrt{1 - 4x + 4x^2 - 4x^2 + 12x + 600}}{2} =$$
$$= \frac{1 - 2x \pm \sqrt{8x + 601}}{2}.$$

Ясно, что выражение $8x + 601$ - должно быть квадратом нечетного числа, т. е. $8x + 601 = (2n+1)^2$.

Тогда $8x + 601 = 4n^2 + 4n + 1$.

$$x = \frac{4n^2 + 4n - 600}{8} = \frac{n(n+1)}{2} - 75.$$

Значит $y_{1,2} = \dfrac{1 - n(n+1) + 150 \pm (2n+1)}{2}$,

тогда $y_1 = \dfrac{1 - n^2 - n + 150 + 2n + 1}{2} = 76 - \dfrac{n(n-1)}{2} > 0$;

$$y_1 = 76 - \frac{n(n-1)}{2};$$

$$y_2 = \frac{1 - n^2 - n + 150 - 2n - 1}{2} = 75 - \frac{n(n+3)}{2} > 0;$$

$y_2 = 75 - \dfrac{n(n+3)}{2}$, но $\begin{cases} x > 0 \\ y_1 > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x > 0 \\ y_2 > 0 \end{cases}$, тогда

а) $\begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} - 75 > 0 \\ 76 - \dfrac{n(n-1)}{2} > 0 \end{cases}$ и б) $\begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} - 75 > 0 \\ 75 - \dfrac{n(n+3)}{2} > 0 \end{cases}$;

а) $\begin{cases} n^2 + n > 150 \\ n^2 - n < 152 \end{cases}$; $\begin{cases} 4n^2 + 4n > 600 \\ 4n^2 - 4n < 608 \end{cases}$;

$$\begin{cases} (2n+1)^2 > 601 \\ (2n-1)^2 < 609 \end{cases}.$$

Найдем ближайшие квадраты целых чисел.

Так как $\begin{cases} 24^2 = 576 < 601 \\ 25^2 = 625 > 609 \end{cases}$,

то $\begin{cases} 2n + 1 > 24 \\ 2n - 1 < 25 \end{cases}$; $\begin{cases} n > 11{,}5 \\ n < 13 \end{cases}$.

Тогда $n = 12$, значит, $x = \dfrac{12 \cdot 13}{2} - 75 = 78 - 75 = 3$,

а $y = 76 - \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 76 - 6 \cdot 11 = 76 - 66 = 10$, отсюда

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 10 \end{cases}.$$

б) $\begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2} - 75 > 0 \\ 75 - \dfrac{n(n+3)}{2} > 0 \end{cases}.$

Почленно складывая, получим $\dfrac{n(n+1)-(n+3)n}{2} > 0$, т. е. $\dfrac{n^2+n-n^2-3n}{2} > 0$, тогда $n < 0$, но n — число положительное, значит в этом случае решения нет.

Ответ: $(3;10)$.

8. Решить в целых числах $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

После преобразования $(y^2-1)x^2 - yx - y^2 = 0$.

Решим полученное квадратное уравнение относительно x.

а) Пусть $y^2 - 1 \neq 0$, тогда

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2(y^2-1)}}{2(y^2-1)} = \frac{y \pm y\sqrt{4y^2-3}}{2(y^2-1)}.$$

1. Пусть $y \neq 0$.
   Положим $4y^2 - 3 = a^2$, тогда $4y^2 - a^2 = 3$. Значит, чтобы решение было в целых числах, необходимо, чтобы D был квадратом целого числа, т. е. $(2y-a)(2y+a) = 3$. Это возможно лишь при $\begin{cases} 2y - a = \pm 3 \\ 2y + a = \pm 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y - a = \pm 1 \\ 2y + a = \pm 3 \end{cases}$.
   Тогда, почленно сложив, получим $y = \pm 1$, что противоречит допущению. (Отметим, что знаки в системах совпадают.)
2. Пусть $y = 0$, тогда $x = 0$, значит $(0;0)$ есть решение.

б) Пусть $y^2 = 1$.

1. Если $y = 1$, то $x = -1$ $\quad(-1;1)$.
2. Если $y = -1$, то $x = 1$ $\quad(1;-1)$.

Ответ: $\{(0;0), (1;-1), (-1;1)\}$.

Тренировочная работа 8

1. $x^4 + 2x^7y - x^{14} - y^2 = 7;$

2. $35xy + 5x - 7y = 1;$

3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5};$

4. $x^2 + xy - 2y^2 = 1;$

5. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91;$

6. $x^4 - y^4 - 2x^2 + 6y^2 = 13;$

7. $x^2 - y^2 = 105$, где $x, y \in \mathbb{Z};$

8. $y^2 - y + 1 = x^2;$

9. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992;$

10. $1 + y + y^2 + y^3 = 2^x.$

Решение тренировочной работы 8

1. $x^4 + 2x^7y - x^{14} - y^2 = 7.$

Решим данное уравнение как квадратное относительно y.

$y^2 - 2x^7y + x^{14} - x^4 + 7 = 0;$

$y_{1,2} = x^7 \pm \sqrt{x^{14} - x^{14} + x^4 - 7} = x^7 \pm \sqrt{x^4 - 7}.$

Тогда для того чтобы корни уравнения были целыми числами, необходимо, чтобы $x^4 - 7 = a^2$, т. е. $x^4 - a^2 = 7$.

Разложим на множители левую часть,

т. е. $(x^2 - a)(x^2 + a) = 7$.

Так как $7 = 1 \cdot 7$ или $7 = (-1) \cdot (-7)$, то

1. $\begin{cases} x^2 - a = 1 \\ x^2 + a = 7 \end{cases};$ 3. $\begin{cases} x^2 - a = -1 \\ x^2 + a = -7 \end{cases};$

2. $\begin{cases} x^2 - a = 7 \\ x^2 + a = 1 \end{cases};$ 4. $\begin{cases} x^2 - a = -7 \\ x^2 + a = -1 \end{cases}.$

Следовательно, почленно складывая и вычитая, получим:

а) $\begin{cases} x^2 = 4 \\ a = 3 \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} a = 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases}$,

тогда $\begin{array}{l} y_1 = 2^7 + 3 \\ y_2 = 2^7 - 3 \end{array}$, т. е. $\begin{array}{l} y_1 = 131 \\ y_2 = 125 \end{array}$.

Значит при $x = 2$ пары $(2; 131)$ и $(2; 125)$ — решение.

При $x = -2$ $\begin{array}{l} y_3 = -2^7 + 3 \\ y_4 = -2^7 - 3 \end{array}$, т. е. $\begin{array}{l} y_3 = -125 \\ y_4 = -131 \end{array}$.

Следовательно, пары $(-2; -125)$ и $(-2; -131)$ — также есть решения.

б) $\begin{cases} x^2 = 4 \\ a = -3 \end{cases}.$

Аналогично рассуждая, получим такие же решения, что и в пункте а).

Ответ: $\{(2; 131), (2; 125), (-2; -125), (-2; -131)\}$.

2. $35xy + 5x - 7y = 1$.

$5x(7y+1)-(7y+1)=0; \quad (7y+1)(5x-1)=0; \quad \left[\begin{array}{l} 7y+1=0 \\ 5x-1=0 \end{array}\right.$.

Значит, решение этого уравнения в целых числах невозможно.

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

Очевидно, что при $xy = 0$ уравнение не определено.

Пусть $xy \neq 0$, тогда $5(x+y) = xy$;

$5x + 5y - xy = 0; \quad x(5-y) + 5y - 25 = -25;$

$x(5-y) + 5(y-5) = -25; \quad x(5-y) - 5(5-y) = -25;$

$(x-5)(5-y) = -25; \quad (y-5)(x-5) = 25.$

а) $\begin{cases} x-5=1 \\ y-5=25 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=6 \\ y=30 \end{cases}; \quad (6;30).$

б) $\begin{cases} x-5=25 \\ y-5=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=30 \\ y=6 \end{cases}; \quad (30;6).$

в) $\begin{cases} x-5=-1 \\ y-5=-25 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=4 \\ y=-20 \end{cases}; \quad (4;-20).$

г) $\begin{cases} x-5=-25 \\ y-5=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-20 \\ y=4 \end{cases}; \quad (-20;4).$

д) $\begin{cases} x-5=5 \\ y-5=5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=10 \\ y=10 \end{cases}; \quad (10;10).$

е) $\begin{cases} x-5=-5 \\ y-5=-5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$

Из условия существования уравнения следует, что при этих условиях уравнение не определено.

Ответ: $\{(6;30),(30;6),(4;-20),(-20;4),(10;10)\}$.

4. $x^2 + xy - 2y^2 = 1$.

Разложим на множители левую часть.

Для этого решим уравнение $x^2 + xy - 2y^2 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 8y^2}}{2} = \frac{-y \pm 3y}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y \end{array}\right. .$$

Тогда $x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y)$.

Следовательно, $(x - y)(x + 2y) = 1$, значит

а) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -3y = 0 \\ x = 1 \end{cases}; \quad (1; 0).$

б) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}; \quad (-1; 0).$

Ответ: $\{(1; 0), (-1; 0)\}$.

5. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91$.

Разложим на множители левую часть.

$x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 =$

$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$.

Значит $(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) = 91$, где $91 = 7 \cdot 13$.

Отметим, что $x^2 \pm xy + y^2 > 0$ при любых x и y.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases};$

$\begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ (x - y)^2 = 4 \end{cases}.$

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}; \quad (3; 1).$

2. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}; \quad (1; 3).$

3. $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}; \quad (-1; -3).$

4. $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = -2 \end{cases}; \quad (-3; -1).$

б) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=13 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 2xy=-6 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x+y)^2=4 \\ (x-y)^2=16 \end{cases}$.

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases}$; $(3;-1)$.
2. $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-4 \end{cases}$; $(-1;3)$.
3. $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=4 \end{cases}$; $(1;-3)$.
4. $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-4 \end{cases}$; $(-3;1)$.

в) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=91 \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=46 \\ 2xy=-90 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x+y)^2=-44 \notin [0;\infty) \\ (x-y)^2=136 \end{cases}$.

г) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x^2+y^2+xy=91 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=46 \\ 2xy=90 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x+y)^2=136 \\ (x-y)^2=44 \end{cases}$, значит $\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{136} \\ xy=\pm\sqrt{44} \end{cases}$,

т. е. $x,y \notin \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{(3;1),(1;3),(-1;-3),(-3;-1),(3;-1),(-1;3),$
$(1;-3),(-3;1)\}$.

6. $x^4-y^4-2x^2+6y^2=13$.

Положим $x^2=t$ $(t\geqslant 0)$, $y^2=z$ $(z\geqslant 0)$, $t^2-z^2-2t+6z=13$.

Выделим полный квадрат.

$(t^2-2t+1)-(z^2-6z+9)+8=13$, тогда получим

$(t-1)^2-(z-3)^2=5$;

$(t-1+z-3)(t-1-z+3)=5$; $(t+z-4)(t-z+2)=5$, следовательно:

а) $\begin{cases} t+z-4=5 \\ t-z+2=1 \end{cases}$; $\begin{cases} t=4 \\ z=5 \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=5 \end{cases}$, где $y \notin \mathbb{Z}$.

б) $\begin{cases} t+z-4=1 \\ t-z+2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} t=4 \\ z=1 \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} t+z-4=-5 \\ t-z+2=-1 \end{cases}$; $t=-2$, $x^2=-2$, $\emptyset$.

г) $\begin{cases} t+z-4=-1 \\ t-z+2=-5 \end{cases}$; $t=-2$, $x^2=-2$, $\emptyset$.

Ответ: $\{(2;1),(2;-1),(-2;1),(-2;-1)\}$.

7. $x^2-y^2=105$, где $x,y \in \mathbb{N}$.

$(x-y)(x+y)=3\cdot5\cdot7$.

а) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=35 \end{cases}$; $\begin{cases} x=19 \\ y=16 \end{cases}$; $(19;16)$.

б) $\begin{cases} x-y=35 \\ x+y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=19 \\ y=-16 \notin \mathbb{N} \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x-y=15 \\ x+y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x=11 \\ y=-4 \notin \mathbb{N} \end{cases}$.

г) $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=15 \end{cases}$; $\begin{cases} x=11 \\ y=4 \end{cases}$; $(11;4)$.

д) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=105 \end{cases}$; $\begin{cases} x=53 \\ y=52 \end{cases}$; $(53;52)$.

е) $\begin{cases} x-y=105 \\ x+y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=53 \\ y=-52 \notin \mathbb{N} \end{cases}$.

ж) $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=21 \end{cases}$; $\begin{cases} x=13 \\ y=8 \end{cases}$; $(13;8)$.

з) $\begin{cases} x-y=21 \\ x+y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=13 \\ y=-8 \notin \mathbb{N} \end{cases}$.

Ответ: $\{(19;16),(11;4),(53;52),(13;8)\}$.

8. $y^2 - y + 1 = x^2$.

После преобразований получим:

$$y^2 - y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2; \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2;$$

$$x^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}; \quad 4x^2 - (2y-1)^2 = 3;$$

$$(2x + 2y - 1)(2x - 2y + 1) = 3.$$

а) $\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 3 \\ 2x - 2y + 1 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \quad (1; 1).$

б) $\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 1 \\ 2x - 2y + 1 = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}; \quad (1; 0).$

в) $\begin{cases} 2x + 2y - 1 = -3 \\ 2x - 2y + 1 = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}; \quad (-1; 0).$

г) $\begin{cases} 2x + 2y - 1 = -1 \\ 2x - 2y + 1 = -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}; \quad (-1; 1).$

Ответ: $\{(1;1), (1;0), (-1;0), (-1;1)\}$.

9. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992$.

$$2^{x^2+x-2} = 2^{(x+2)(x-1)}; \quad 2^{x^2-4} = 2^{(x+2)(x-2)}.$$

Положим $2^{x+2} = t \ (t > 0)$.

Тогда уравнение примет вид: $t^{x-1} - t^{x-2} = 992$.

Так как $992 = 32 \cdot 31$, то $t^{x-2}(t-1) = 2^5 \cdot 31$.

$$\begin{cases} t^{x-2} = 2^{(x+2)(x-2)} = 2^5 \\ t - 1 = 31 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2^{x^2-4} = 2^5 \\ t = 32 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 4 = 5 \\ 2^{x+2} = 2^5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ x + 2 = 5 \end{cases}; \quad x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

10. $1 + y + y^2 + y^3 = 2^x$.

Так как $1+y+y^2+y^3 = (1+y)+y^2(1+y) = (1+y)\left(1+y^2\right)$, то $(1+y)\left(1+y^2\right) = 2^x$.

а) Пусть $x = 0$, тогда $(1+y)\left(1+y^2\right) = 1$;

$\begin{cases} 1+y=1 \\ 1+y^2=1 \end{cases}$; $\quad y = 0$, т. е. $(0;0)$.

б) Пусть $x = 1$, тогда $(1+y)\left(1+y^2\right) = 2$.

1. $\begin{cases} 1+y=2 \\ 1+y^2=1 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} y=1 \\ y^2=0 \end{cases}$ $\emptyset$

2. $\begin{cases} 1+y^2=2 \\ 1+y=1 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} y^2=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\emptyset$

в) Пусть $x = 2$, тогда $(1+y)\left(1+y^2\right) = 4$.

1. $\begin{cases} 1+y=1 \\ 1+y^2=4 \end{cases}$ $\emptyset$

2. $\begin{cases} 1+y=4 \\ 1+y^2=1 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} y=3 \\ y=0 \end{cases}$ $\emptyset$

3. $\begin{cases} 1+y=2 \\ 1+y^2=2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} y=1 \\ y^2=1 \end{cases}$; $\quad y = 1$, т. е. $(2;1)$.

Ответ: $\{(0;0),(2;1)\}$.

Отметим, что при $x > 2$, $x \in \mathbb{N}$ полученные системы уравнений всегда будут несовместными.

Введение в криптографию

Некоторые шифры

В наше время трудно переоценить значение информационной безопасности: в связи, промышленности, обороне, в общественной деятельности, выборах, торговле, образовании, науке и так далее. Рассмотрим ряд бытовых примеров.

Задача 1. В одной из современных школ двери каждого класса начальной школы были оснащены дисплейно-цифровым кодовым замком вида

1	2	3
4	5	6
7	8	9
В	0	С

(В — ввод, С — сброс)

На дисплее при нажатии клавиши В высвечивается произвольное четырехзначное число. После этого нажимается какая-то клавиша с цифрой: если верно, то замок открывается, если нет, то, нажав клавишу С, все необходимо начать сначала.

Очевидно, что хотя код-ключ очень простой, но психологически для человека, не знающего его, достаточно неожиданный, а потому для разгадки трудный. Необходимо учесть, что первоклассники знают цифры и умеют считать в пределах десяти.

В одну из сред сентября состоялось родительское собрание первоклашек. Чтобы попасть на собрание, необходимо было или знать код-ключ замка, или угадать его.

Для того чтобы его угадать, до собрания на дверях была вывешена таблица ответов для разных четырехзначных чисел, высвеченных на дисплее:

2 1 3 4	— нажать клавишу 1
5 7 9 0	— нажать клавишу 2
1 4 7 3	— нажать клавишу 1
2 0 8 9	— нажать клавишу 4
9 8 1 3	— нажать клавишу 3
7 8 7 8	— нажать клавишу 4

Попробуйте самостоятельно открыть замок, используя таблицу

К сожалению, большинство родителей не смогли открыть двери. Решение было рассмотрено на собрании.

В начертании цифр 1, 2, 3, 5, 7 никаких замкнутых кружочков, овалов или ломаных контуров нет; цифры 4, 6, 9, 0 имеют один замкнутый кружочек, овал или ломаный контур; цифра 8 имеет два кружочка.

Задача для первоклассников состояла в том, чтобы посчитать количество замкнутых контуров в четырехзначном числе, высвеченном на дисплее, и нажать соответствующую клавишу с нужной цифрой.

Отметим, что для второго класса код-ключ можно усложнить, например, посчитать сумму цифр на дисплее и набрать соответствующее число на цифровом замке; для третьего — перемножить крайние и средние цифры и набрать наибольшее произведение и так далее.

Задача 2. На складе дорогостоящих и крупногабаритных товаров было девять проходных дверей с цифровыми кодовыми замками, пропускающими за один раз только одного человека — для рядовых охранников, грузчиков, уборщиц, плотников, электриков, сантехников и так далее, — которые работают каждый по своему графику и днем, и ночью. По условию на работу брали работников со средним и высшим образованием и с хорошим знанием русского языка. Службе безопасности склада и программистам необходимо было разработать простой и относительно надежный код-ключ для цифровых замков на дверях для прохода через них на работу. Через центральный вход-ворота проход был запрещен.

В чем же идея такого кода-ключа?

Каждому работнику на конфиденциальной основе (в секретном приложении к договору) сообщался алгоритм кода-ключа. Он состоял в том, что каждому работнику присваивался трехзначный личный табельный номер (например, 207), который он набирал на замке сначала.

Далее необходимо было записать текущее число месяца буквами, подсчитать количество этих букв (например, для 13-го числа в слове «тринадцать» — 10 букв) и набрать его на замке. Наконец, после этого добавить номер проходной.

Для усложнения ключа можно было бы добавить число букв текущего дня недели (например, вторник или воскресенье) и т. д.

Если набран неверный код, он сбрасывался, и работнику необходимо было попытаться пройти через другую проходную. Исходя из этого алгоритма легко впоследствии установить, какой работник пришел или ушел с работы через какую проходную, какого числа, в какое время и т. п.

Конечно, на реальных воротах на вход и выход применяются более серьезные средства безопасности для кладовщиков, грузов, транспорта: электронные пропуска, электронные накладные, видеорегистраторы и т. п.

Теперь познакомимся с *неинструментальными* методами шифрования и дешифрования информации (текста).

1. Рассмотрим некоторые способы зашифровки конкретного выражения — текста: «На всякого мудреца довольно простоты».

   Если посчитать, здесь 32 буквы-символа. Очевидно, что это количество символов легко разместить (записать) в квадратную таблицу 6×6 (в каждой клетке только по одной букве).

   а) Разместим буквы диагональным методом (маршрут перестановки букв в квадратную таблицу см. рис. 1).

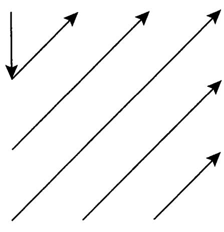


Рис. 1

Н	В	К	М	Ц	Л
А	Я	О	Е	О	Р
С	Г	Р	В	П	О
О	Д	О	О	Т	
У	Д	Н	С	Ы	
А	Ь	О	Т		

Таблица 1

б) Так как есть 4 клетки, которые свободны, а в выражении 4 пробела, то пробелы обозначим любой неиспользованной в тексте буквой, например, Ф (см. табл. 2).

Н	Ф	Я	О	Р	О
А	С	Г	Д	Д	Н
В	О	У	Ф	Ь	Р
К	М	А	Л	П	Т
Ф	Ц	О	Ф	С	Т
Е	В	О	О	О	Ы

Таблица 2

Очевидно, что в таком виде, если не знать алгоритма (в данном случае геометрического) перестановки букв алфавита, прочитать текст сложно, т. е. табличный шифр, записанный в квадратную таблицу, готов.

в) Теперь, используя диагональный геометрический маршрут перестановки, можно текст, рассмотренный ранее, представить в виде линейного последовательного чередования букв:

НАФВСЯКОГОФМУДРЕЦАФДОВОЛЬНОФ-
ПРОСТОТЫ

Следовательно, в пункте в) показан, по сути, алгоритм — ключ для прочтения зашифрованных в квадратной таблице в геометрическом алгоритме букв информации.

2. Отметим, что изначально текст из таблицы 2 может быть передан другим последовательно-линейным набором букв.

Для этого считывают и записывают буквы построчно слева-направо, сверху-вниз из таблицы подряд, тогда получим:

НФЯОРОАСГДДНВОУФЬРКМАЛПТФЦОФСТЕ-
ВОООЫ — шифрограмма готова.

В таком виде расшифровка текста еще сложнее.

Но мы можем расшифровать послание, так как мы знаем ключ, а именно:

а) квадратную таблицу букв;

б) диагональную последовательность заполнения квадратной таблицы буквами или шифротекста;

в) способ представления таблицы букв в виде линейного последовательного набора букв — шифротекста.

Тогда для расшифровки текста сообщения необходимо действовать в обратном порядке:

а) линейный набор текста перевести в табличный, учтя известную размерность таблицы (6×6);

б) табличный набор, используя известную диагональную «раскрутку», развернуть опять в линейную последовательную череду букв и прочитать.

Итак, имеется единый ключ шифровки и расшифровки текстовой информации.

Известно, что одним из самых первых шифровальных сообщений, использующих перестановку букв, был шифр спартанцев в войне Спарты против Афин в V в. до н. э. Для этого использовался жезл цилиндрической формы, на который виток к витку по спирали наматывалась плотно без просветов и нахлестов узкая лента. Затем на этой ленте вдоль оси жезла записывался необходимый для передачи текст. Лента сматывалась с цилиндра и отправлялась нужному адресату, который, имея жезл того же диаметра, наматывал ленту и читал сообщение. Такой жезл называется «Сцитал», а шифр называется шифром «Сцитала».

Рассмотрим пример, который показывает использование данного шифра. Используя шифр «Сцитала», прочитайте сообщение, которое привез гонец адресату. К сожалению, адресат в результате пожара потерял жезл-цилиндр. Возможно ли расшифровать послание, если гонец знает:

лента-шифр была исписана полностью, и при намотке ленты было сделано целое число оборотов?

На ленте была следующая линейная запись букв (в русском переводе):

ВЬНАМЛСВУНЕИВЗЯТПКОПЕ
АОПРООЧОЖНЛОАСРЬЛДГО
ДЖТАТНИРТКНРБРОКУОУИ
ОЛЕЛАЗМПКЙЕТУРОДАОКЙ

Так как в шифротексте восемьдесят одна буква, запись в послании по строкам и столбцам должна быть кратна делителям числа восемьдесят один, т. е.:

$81 = 3^4; \quad d = 3; 9; 27; 81.$

Очевидно, что три буквы в столбце слишком мало, попробуем составить таблицу, где в столбце будет девять букв, тогда и в строке будет девять букв.

Преобразуем ленту букв в таблицу букв. Запись букв производится сверху вниз, слева направо (как при намотке на цилиндр «Сцитала»).

Первый столбец — первые девять букв: ВЬНАМЛСВУ;

второй столбец — вторые девять букв: НЕИВЗЯТПК и так далее.

Читать необходимо по строчкам слева направо и сверху вниз.

В	Н	О	Ч	Ь	Т	Р	Е	Т
Ь	Е	П	О	Л	Н	О	Л	У
Н	И	Е	Ж	Д	И	К	А	Р
А	В	А	Н	Г	Р	У	З	О
М	З	О	Л	О	Т	О	М	Д
Л	Я	П	О	Д	К	У	П	А
С	Т	Р	А	Ж	Н	И	К	О
В	П	О	С	Т	Р	О	Й	К
У	К	О	Р	А	Б	Л	Е	Й

Таблица 3

Ура! В данном случае мы сразу нашли нужную размерность квадрата. Послание расшифровано: «В ночь третье полнолуние жди караван грузом золотом для подкупа стражников постройку кораблей».

Значит, в данном случае расшифровать послание без цилиндра оказалось возможным. Хотя в то время (V век до н. э.) без жезла-цилиндра или знания о его размерах прочитать сообщение было невозможно.

Много позже знаменитый Аристотель (384 до н. э. — 322 до н. э.) разработал первое дешифровальное устройство «Антисцитал» в виде конусообразного копья, на которое наматывался перехваченный ремень или папирусная лента, и передвигался по оси до тех пор, пока не появлялся осмысленный текст сообщения.

Упражнение 5

Используя ключ, рассмотренный в первой задаче, прочитайте шифротекст НВКЕДПУАНЕЯЛЬНЧРИЕСЙДЕОЗИШТИЕЖПИТЧЕРБЛЬРРУРЕООТПЕЛЕПНОЕВМУМОХКЕЯСМОДЫВЦТКОПЬВТНРЕ.

Так как в шифротексте 81 буква, значит, для заполнения текста используем квадрат 9×9. Внесем в него *построчно* и последовательно слева-направо, сверху-вниз шифротекст.

Н	В	К	Е	Д	П	У	А	Н
Е	Я	Л	Ь	Н	Ч	Р	И	Е
С	Й	Д	Е	О	З	И	Ш	Т
И	Е	Ж	П	И	Т	Ч	Е	Р
Б	Л	Ь	Р	Р	У	Р	Е	О
О	Т	П	Е	Л	Е	П	Н	О
Е	В	М	У	М	О	Х	К	Е
Я	С	М	О	Д	Ы	В	Ц	Т
К	О	П	Ь	В	Т	Н	Р	Е

Таблица 4

Используя маршрут *диагонального* следования (см. рис. 1), запишем:

НЕ ВСЯКИЙ ЛЕБЕДЬ ДОЛЖЕН ПЕТЬ ПОЧУЯВ ПРИЗРАК СМЕРТИ ИНОМУ ЛУЧШЕ ПОМЕРЕТЬ ДО ПЕРВЫХ НОТ В КОНЦЕРТЕ (см. табл. 4).

Учитывая интервалы и знаки препинания, запишем так: «Не всякий лебедь должен петь, почуяв призрак смерти. Иному лучше помереть до первых нот в концерте» — известные стихи шотландского поэта Роберта Бернса (1774–1796 гг.).

При этом мы использовали шифр-*перестановку* с известным ключом (или маршрутной перестановкой). В Древней Греции использовали также шифр Гая Юлия Цезаря (100 до н. э. — 44 до н. э.), описанный историком

Древнего Рима Светонием (70–130 гг.). В своей переписке Г. Ю. Цезарь использовал собственный шифр, идея которого состояла в том, что выписывался последовательно алфавит в обычном виде, а затем под ним выписывался тот же алфавит, но со сдвигом на три буквы влево. Для русского алфавита это значит, что буква А заменялась буквой Г, буква Б заменялась буквой Д и т. д.:

а	б	в	...	э	ю	я
г	д	е	...	а	б	в

Таким же шифром замены пользовались последующие римские цезари, но применялся сдвиг на четыре, пять и более букв.

Значительно позже для запоминания ключа использовали какое-нибудь слово или *слоган*. Например, вторую строчку таблицы начинали ключом- слоганом, затем вписывали в алфавитном порядке буквы, не вошедшие в слоган — например, Петербург.

а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п	р	с
П	Е	Т	Е	Р	Б	У	Р	Г	а	в	д	ж	з	к	л	и

В данном примере показан неудачный пример слогана — Петербург, так как в нем по две буквы Е и Р и нет однозначности, а для описания такого ключа требуется новое правило для последующих повторяющихся букв в слогане.

т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я		
м	н	о	с	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я

Обратите внимание, что в первой строчке нет буквы Ё и Й, т. е. использована 31 буква. Во второй строчке в алфавите использованы только 24 буквы. Тогда, так как в слове ПЕТЕРБУРГ — 9 букв, то во второй строчке необходимо $24 + 9 = 33$ клеточки-места.

Упражнение 6

Зашифруйте текст, используя слоган «КУПИДОН»:

«Пока травка подрастет, лошадка сдохнет» (слова молодого Гамлета из одноименной трагедии Шекспира).

а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п
К	У	П	И	Д	О	Н	а	б	в	г	е	ж	з	л

р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
м	р	с	т	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я

Переходя от буквы первой строчки к соответствующим буквам второй строчки (под ними), получим шифротекст:

ЛЗВКСМКПВКЛЗДМКРСОСГЗШКДВКРДЗХЖОС

Естественно, расшифровка идет при переходе букв второй строки в соответствующие буквы первой строки.

В данном случае число вариантов *ключа* значительно больше числа букв алфавита, что делает более трудным расшифровку текста для противника.

Рассмотренные шифры замены имеют существенный дефект. Если в открытом тексте часто встречается одна и та же буква, то зная частотность разных букв алфавита в данном языке, при достаточно большом сообщении можно гарантировать расшифровку при достаточном времени.

Здесь приведена таблица частот использования букв в русском языке.

а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
7,96	1,67	4,71	1,87	3,07	9,01	1,18	1,74	7,36	3,25

л	м	н	о	п	р	с	т	у	ф
4,64	3,13	6,70	11,26	2,71	3,90	5,32	6,31	2,63	0,18

х	ц	ч	ш	щ	ы	ь	э	ю	я
0,73	0,23	1,91	0,82	0,29	1,73	0,36	0,36	0,60	2,39

Довольно часто используется оцифровка алфавита. Приведем стандартную оцифровку русского алфавита из 33 букв.

а	б	в	г	д	е	ё	ж	з	и	й	к	л	м	н	о	п
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Возможен и сокращенный вариант из 30 букв, в котором нет букв й, ё, ъ.

а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ы	ь	э	ю	я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Упражнение 7

Запишите со сдвигом букв алфавита на единицу влево в цифровом варианте стихи Р. Бернса (1759–1796 гг.), рассмотренные ранее:

«Не всякий лебедь должен петь, почуяв призрак смерти. Иному лучше помереть до первых нот в концерте».

Для этого рассмотрим комбинированное шифрование с использованием:

а) шифра замены (цифровой вариант со сдвигом);

б) шифра перестановки с указанием геометрического маршрута перестановки;

в) шифра записи геометрического маршрута — представления цифр квадратной таблицы в ленту последовательной череды чисел — символов шифротекста.

а) Рассмотрим, как тогда выглядит таблица, при этом используем сокращенный вариант алфавита из 30 букв (учтем сдвиг алфавита влево на единицу).

б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п	р
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ы	ь	э	ю	я	а
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Используя оцифровку сокращенного варианта алфавита, запишем исходный текст и оцифруем его.

Н	Е	В	С	Я	К	И	Й	Л	Е	Б	Е	Д
12	5	2	16	29	9	8	8	10	5	1	5	4

Ь	Д	О	Л	Ж	Е	Н	П	Е	Т	Ь	П	О
26	4	13	10	6	5	12	14	5	17	26	14	13

Ч	У	Я	В	П	Р	И	З	Р	А	К	С	М
22	18	29	2	14	15	8	7	15	30	9	16	11

Е	Р	Т	И	И	Н	О	М	У	Л	У	Ч	Ш	Е
5	15	17	8	8	12	13	11	18	10	18	22	23	5

П	О	М	Е	Р	Е	Т	Ь	Д	О	П	Е	Р	В
14	13	11	5	15	5	17	26	4	13	14	5	15	2

Ы	Х	Н	О	Т	В	К	О	Н	Ц	Е	Р	Т	Е
25	20	12	13	17	2	9	13	12	21	5	15	17	5

б) Шифр перестановки с указанием геометрического маршрута перестановки.

В данном случае используем другую диагональную геометрическую схему маршрута перестановки вида:

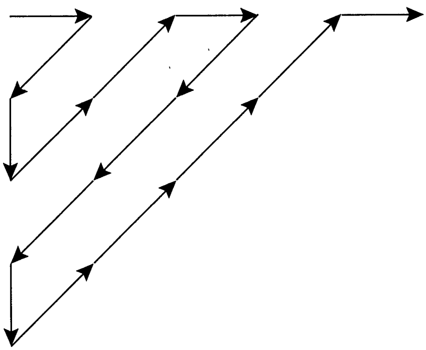


Рис. 2

Запишем цифровой шифротекст стихотворения в квадрат — 9×9, так как в тексте 81 буква (см. табл. 5).

12	5	9	8	4	13	18	29	12
2	29	8	26	10	22	5	8	16
16	10	4	4	13	14	8	23	17
5	5	5	14	15	17	22	16	26
1	12	26	8	15	18	15	4	13
14	17	7	5	10	5	13	12	17
5	15	11	18	11	14	20	2	5
30	16	11	13	5	25	9	21	15
9	13	14	15	2	13	12	17	5

Таблица 5

в) Далее запишем квадратную таблицу в виде линейного последовательного чередования чисел по маршруту (рис. 3):

12, 2, 16, 5, 1, 14, 5, 30, 9, 13, 16, 15, 17, 12, 5, 10, 29, 5, 9, 8, 4, 5, 26, 7, 11, 11, 14, 15, 13, 18, 5, 8, 14, 4, 26, 8, 4, 10, 13, 15, 15, 10, 11, 5, 2, 13, 25, 14, 5, 18, 17, 14, 22, 13, 18, 5, 8, 22, 15, 13, 20, 9, 12, 17, 21, 2, 12, 4, 16, 23, 8, 29, 12, 16, 17, 26, 13, 17, 5, 15, 5.

Итак, шифротекст составлен. Ключ шифрования и дешифрования едины.

Если предыдущие рассуждения вам понятны и не очень утомили, то продолжим дальше.

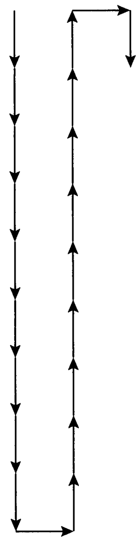


Рис. 3

Для большей криптоустойчивости (т. е. большей трудности при расшифровке), поступим следующим образом.

В основном тексте при прежней оцифровке сокращенного алфавита 81 буква, причем существуют 15 пробелов. При этом не использованы 3 буквы: Ф, Э и Ю. Будем для первого *пробела* использовать букву Ф, для второго — букву Э, для третьего — букву Ю. Далее все повторяется сначала. И так до конца текста. Тогда лента первоначального шифротекста составит 96 чисел:

12, 5, $\frac{\text{Ф}}{19}$, 2, 16, 29, 9, 8, 8, $\frac{\text{Э}}{27}$, 10, 5, 1, 5, 4, 26, $\frac{\text{Ю}}{28}$, 4, 13, 10, 6, 5, 13, $\frac{\text{Ф}}{19}$, 14, 5, 17, 26, $\frac{\text{Э}}{27}$, 14, 13, 22, 18, 29, 2, $\frac{\text{Ю}}{28}$, 14, 15, 8, 7, 15, 30, 9, $\frac{\text{Ф}}{19}$, 16, 11, 5, 15, 17, 8, $\frac{\text{Э}}{27}$, 8, 12, 13, 11, 18, $\frac{\text{Ю}}{28}$, 10, 18, 22, 23, 5, $\frac{\text{Ф}}{19}$, 14, 13, 11, 5, 15,

$5, 17, 26, \frac{\text{Э}}{27}, 4, 13, \frac{\text{Ю}}{28}, 14, 5, 15, 2, 25, 20, \frac{\text{Ф}}{19}, 12, 13, 17,$
$\frac{\text{Э}}{27}, 2, \frac{\text{Ю}}{28}, 9, 13, 12, 21, 5, 15, 17, 5.$

Оставшиеся четыре клетки произвольно заполним цифрой 0. Таким образом, все числа можно записать в квадрат 10×10 по некоторому геометрическому маршруту (см. рис. 4).

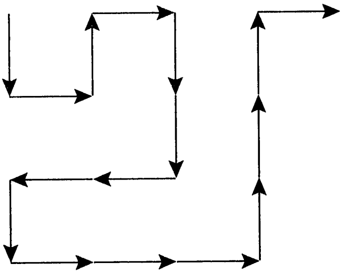


Рис. 4

Получим квадратную таблицу чисел:

12	2	16	4	26	29	22	23	5	5
5	19	29	5	28	18	28	22	19	17
0	8	9	1	4	22	14	18	14	15
8	27	10	5	13	13	15	10	13	5
12	5	6	10	0	14	8	28	11	21
19	14	5	17	26	27	7	18	5	12
5	11	16	19	9	30	15	11	15	13
15	17	8	27	0	8	12	13	5	9
15	5	14	28	13	4	27	26	17	28
2	0	25	20	19	12	13	17	27	2

Таблица 6

Далее таблицу 6 можно записать в линейную шифрограмму построчно подряд слева-направо, сверху-вниз, смотря как вы заранее договоритесь с адресатом.

Возможны и иные способы геометрических маршрутов, обращающие квадратную таблицу чисел в ленточную шифрограмму:

12	2	16	4	26	29	22	23	5	5	5	19	29	5

28	18	28	22	19	17	0	8	9	1	4	22	14	18

14	15	8	27	10	5	13	13	15	10	13	5	12	5

6	10	0	14	8	28	11	21	19	14	5	17	26	27

7	18	5	12	5	11	16	19	9	30	15	11	15	13

15	17	8	27	0	8	12	13	5	9	15	5	14	28	13

4	27	26	17	28	2	0	25	20	19	12	13	17	27	2

Итак, мы получили шифротекст с использованием:

а) шифра замены (оцифровка сокращенного алфавита и сдвиг алфавита);

б) шифра перестановки в квадрат по определенному геометрическому маршруту;

в) перевод таблицы чисел по определенному правилу-маршруту в ленточную шифрограмму;

г) для «потопления» статистики пробелы между словами заполняют неиспользованными буквами — числами по очереди и произвольно добавляют для заполнения квадрата четыре нуля.

Естественно, расшифровка такого шифротекста существенно сложнее, чем текстов, рассмотренных ранее. В таких случаях говорят о большей *криптоустойчивости* текста — хотя это тема отдельного профессионального разговора. Отметим, что этим специально занимаются криптоаналитики.

Упражнение 8

Прочитать шифрограмму, заданную лентой чисел:

18	3	1	12	7	4	7	1	10	20	25	13	24

30	14	18	14	18	29	3	1	2	9	10	29	27

8	14	7	3	24	18	8	22	4	29	16	15	23

7	12	2	12	28	18	28	7	39	15	7	11	14

23	19	13	2	28	26	15	12	20	16	3	21

зная способ шифровки:

а) ключ сдвига «ТРЕВОГА»;

б) последовательную оцифровку нового алфавита;

в) геометрический маршрут перестановки по контуру (рис. 5);

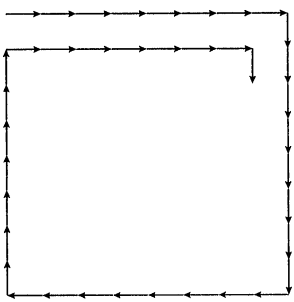


Рис. 5

г) вертикальное считывание сверху-вниз, слева-направо;

д) вместо пробелов вставка неиспользованных букв подряд;

е) через каждые 7 чисел вставка неиспользованных чисел по очереди (имитовставки).

Решение

1. Сначала поместим числа-символы линейной шифрограммы в квадрат. Учтем количество чисел 8×8 и применим вертикальную столбчатую сверху-вниз, слева-направо считку. Построим таблицу.

18	10	14	29	8	12	15	28
3	20	18	27	22	2	7	26
1	25	29	8	4	12	11	15
12	14	3	14	29	25	14	12
7	24	1	7	16	18	23	20
4	30	2	3	15	28	19	16
7	14	9	24	23	7	13	3
1	18	10	18	7	30	2	21

Таблица 7

2. Затем, учитывая маршрут перестановки по контуру, переведем табл. 7 чисел в *ленту* чисел по геометрическому маршруту (см. рис. 5)

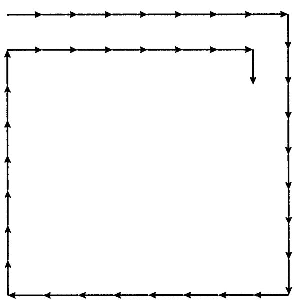


Рис. 5

18	10	14	29	8	12	15	28	26	15	12	20	16

3	21	2	30	7	18	10	18	1	7	4	7	12

1	3	20	18	27	22	2	7	11	14	23	19	13

7	23	24	9	14	30	24	14	25	29	8	4	12

25	18	28	15	3	2	1	3	14	29	16	7

3. Далее перейдем от чисел к буквам алфавита, сдвинутого на слоган «ТРЕВОГА». Напомним, что в алфавите буквы из слогана «ТРЕВОГА» исключаются.

а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	н	о	п
Т	Р	Е	В	О	Г	А	**б**	**д**	**ж**	**з**	**и**	**к**	**л**	**м**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ы	ь	э	ю	я
н	**п**	**с**	**у**	**ф**	**х**	**ц**	**ч**	**ш**	**щ**	**ы**	**ь**	**э**	**ю**	**я**
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

4. Теперь можно перейти к оцифровке текста. Буквы над символом Δ служат для заполнения пробелов и заполнения пустых клеток, а также для утопления частотной статистики (имитовставки).

18	10	14	29	8	12	15	28	26	15	12	20	16
С	Ж	Л	Ю	Б	И	М	Э	Ы	М	И	Ф	Н
	Δ						Δ				Δ	

3	21	2	30	7	18	10	18	1	7	4	7	12
Е	Х	Р	Я	А	С	Ж	С	Т	А	В	А	И
	Δ		Δ			Δ						

1	3	20	18	27	22	2	7	11	14	23	19	13
Т	Е	Ф	С	Ь	Ц	Р	А	З	Л	Ч	У	К
		Δ			Δ					Δ		

7	23	24	9	14	30	24	14	25	29	8	4	12
А	Ч	Ш	Д	Л	Я	Ш	Л	Щ	Ю	Б	В	И
	Δ	Δ				Δ		Δ				

25	18	28	15	3	2	1	3	14	29	16	7
Щ	С	Э	М	Е	Р	Т	Е	Л	Ь	Н	А
Δ		Δ									

«С любимыми не расставайтесь, разлука для любви смертельна». Шифротекст прочитан.

Магические квадраты

Еще древние индусы знали методы построения магических квадратов нечетного порядка.

В период раннего средневековья для шифрования и дешифрования посланий пользовались также таблицами магических квадратов.

Магическим квадратом называются квадратные таблицы $n \times n$ со вписанными в их клетки натуральными числами, которые дают в сумме по каждому столбцу, каждой строке, каждой диагонали одно и то же число.

Если же все числа в магическом квадрате есть натуральные числа от 1 до n^2, то такие магические квадраты называются *нормальными*, а постоянная сумма для них вычисляется как значение функции $M = f(n) = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Рассмотрим нормальный магический квадрат четвертого порядка. Как строится магический квадрат четвертого порядка, см. с. 344. Шифруемый текст вписывался в квадрат, заполненный натуральными числами от 1 до 16, по приведенной в нем нумерации.

Рассмотрим таблицу последовательных натуральных чисел 4×4, т. е. квадрат четвертого порядка (по количеству чисел в столбце или строке).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Пример оцифровки текста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Л	О	Д	К	А	П	Р	И	Д	Е	Т	К	Т	Р	Е	М

После оцифровки таблица заполняется текстом

Л	О	Д	К
А	П	Р	И
Д	Е	Т	К
Т	Р	Е	М

Далее используем магический квадрат (несколько позже покажем способ построения данного нормального магического квадрата).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Убедимся, что это нормальный магический квадрат:
$16+3+2+13=5+10+11+8=9+6+7+12=4+15+14+1=34$;
$16+5+9+4=3+10+6+15=2+11+7+14=13+8+12+1=34$;
$16+10+7+1=4+6+11+13=34$.

Тогда текст имеет вид

М	Д	О	Т
А	Е	Т	И
Д	П	Р	К
К	Е	Р	Л

Если потом выписывается содержимое таблицы по строкам, то получится шифровка, связанная с перестановкой букв МДОТАЕТИДПРККЕРЛ.

Магических квадратов 4×4 существует 880, а число магических квадратов 5×5 около 250 000. Поэтому магические квадраты больших размеров были хорошей основой для надежной системы шифрования того времени.

Очевидно, что ручной перебор всех вариантов ключа для этого шифра просто невозможен.

Более подробно некоторые методы построения магических квадратов были описаны Клодом Гаспа́ром Баше́ де Мезириа́к (1581–1638) — французским математиком, поэтом, лингвистом, переводчиком. Он был одним из первых членов Французской академии(1635) по математике (кресло номер 13).

Известно, что Баше родился в состоятельной дворянской семье, рано лишился обоих родителей. Учился в Реймсе в иезуитском коллеже у Жака де Билли, с которым его впоследствии связала тесная дружба и общий интерес к математике. Изучил несколько языков, в том числе латинский, греческий, иврит, итальянский и испанский. Писал стихи на французском, итальянском и латыни. Женился в 1612 году, стал отцом семерых детей.

В этом же 1612 году Баше опубликовал сборник занимательных арифметических задач «Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres», в русском переводе — «Интересные задачи из области чисел» (2-е дополненное издание вышло в 1624 г.). Огромный интерес вызвала публикация им в 1621 г. «Арифметики» Диофанта, написанной предположительно в III веке н. э. на греческом и в собственноручном переводе на латинский с обширными комментариями.

Этот перевод стал настольной книгой и источником новых открытий для Пьера Ферма (1601–1665) и других выдающихся математиков XVII века; именно на полях этой книги Ферма записал формулировку своей Великой теоремы: уравнение вида $x^n + y^n = z^n$ для любых $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, $x, y, z \in \mathbb{N}$ не имеет решения.

Среди других достижений Баше по арифметике и теории чисел можно назвать следующие:

- исследовал диофантовы уравнения, для решения которых разработал ряд оригинальных алгоритмов, — в том числе с помощью непрерывных дробей;
- впервые опубликовал фундаментальную формулу, называемую сейчас соотношением Безу; Баше дал (в словесной формулировке) ее частный случай для взаимно простых чисел;
- описал общий метод составления магических квадратов любого нечетного порядка;
- высказал предположение о представимости любого натурального числа в виде суммы не более четырёх квадратов, доказанное в XVIII веке Лагранжем.

Баше опубликовал также антологию французской поэзии под названием «Délices».

Известен также очень важный вклад в развитие использования магических квадратов для шифровки секретных сообщений, сделанный послом Франции при дворе короля Сиама —

де ла Лубером (Королевство Сиам — современное королевство Таиланд).

Например:

Таблица составлена по методу Баше для натуральных чисел от 1 до 25.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

А эта таблица составлена по методу де ла Лубера.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Покажем один из алгоритмов построения магического квадрата нечётного порядка.

а) Рассмотрим построение магического квадрата третьего порядка (по количеству чисел на каждой из его сторон), используя метод Баше.

Для этого заполним квадрат 3×3 последовательными натуральными числами, двигаясь слева направо, сверху вниз.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Повернем квадрат на $45°$ относительно диагонали квадрата по часовой стрелке. Получим «диагональный» квадрат:

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

Теперь выделим квадрат с центром в числе 5, стороны которого параллельны большим диагоналям «диагонального» квадрата, а вершины этого квадрата принадлежат сторонам «диагонального» квадрата.

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

Далее: числа, не вошедшие в выделенный квадрат, сдвинем на три клеточки. Число клеток сдвига определяется порядком магического квадрата.

Перенесем число 1 на три клеточки вниз, а число 9 на три клеточки вверх.

	4	9	2	
7		5		3
	8	1	6	

Аналогично перенесем число 7 на три клеточки вправо, а число 3 на три клетки влево.

4	**9**	2
3	5	**7**
8	**1**	6

Нормальный магический квадрат построен, так как M — сумма чисел по строкам, диагоналям и столбцам — постоянна и равна 15. Действительно,

$$4+9+2=3+5+7=8+1+6=15;$$

$$4+3+8=9+5+1=2+7+6=15;$$

$$4+5+6=2+5+8=15.$$

Постоянная сумма нормального магического квадрата равна $M=f(3)=\dfrac{3(3^2+1)}{2}=\dfrac{3\cdot 10}{2}=15$. Все совпадает.

Еще раз отметим, что *число клеток*, на которое надо сдвинуть вверх, вниз, вправо, влево числа, не вошедшие в выделенный квадрат, связано с порядком магического квадрата.

Примечания

1. Данный нормальный магический квадрат был известен уже более 4000 лет тому назад китайским математикам, что выяснилось из археологических раскопок.

2. Известно, что из любого нормального магического квадрата можно получить бесконечное количество магических квадратов, не являющихся нормальными магическими квадратами. В этом случае каждое число исходного квадрата нужно изменить на одну и ту же постоянную величину — положительную или отрицательную. Возможно также изменение каждого числа в разы больше или меньше и так далее.

Рассмотрим построение магического квадрата третьего порядка, начиная с любого натурального числа, например, с 3 до 11:

		3		
	6		4	
9		7		5
	10		8	
		11		

Тогда из таблицы чисел

3	4	5
6	7	8
9	10	11

, действуя аналогично ранее показанному способу, получим магический квадрат

6	**11**	4
5	7	**9**
10	**3**	8

.

Действительно,

$$6 + 5 + 10 = 11 + 7 + 3 = 4 + 9 + 8 = 21;$$

$$6 + 11 + 4 = 5 + 7 + 9 = 10 + 3 + 8 = 21;$$

$$6 + 7 + 8 = 10 + 7 + 4 = 21.$$

б) Рассмотрим построение магического квадрата пятого порядка (по количеству чисел на каждой стороне). Для этого рассмотрим «диагональный» квадрат. По диагоналям последовательно разместим натуральные числа от 11 до 35. Следующая диагональ, параллельная исходной диагональной стороне, продолжает последовательно натуральный ряд чисел.

				11				
			16		12			
		21		17		13		
	26		22		18		14	
31		27		23		19		15
	32		28		24		20	
		33		29		25		
			34		30			
				35				

Выделим центральный квадрат с центром в числе 23. Вершины выделенного квадрата принадлежат сторонам «диагонального» квадрата.

				11				
			16		12			
		21		17		13		
	26		22		18		14	
31		27		23		19		15
	32		28		24		20	
		33		29		25		
			34		30			
				35				

Очевидно, что сдвиг чисел, не вошедших в выделенный квадрат, равен 5 клеткам, т. е. порядку магического квадрата.

Известно, что при сдвиге на величину k, где k — разность между наименьшим натуральным числом квадратной таблицы и единицей (здесь $k = 11 - 1 = 10$; если $k = 0$ — сдвига нет), постоянная сумма определяется формулой $M_k = f_k(n) = \dfrac{n(n^2+1)}{2} + nk.$

Действительно, $M_{10} = f_{10}(5) = \dfrac{5 \cdot (5^2+1)}{2} + 5 \cdot 10 = 115.$

Перенесем число 11 на 5 клеточек вниз, а число 35 на 5 клеточек вверх.

			16		12			
		21		17		13		
	26		22	35	18		14	
31		27		23		19		15
	32		28	11	24		20	
		33		29		25		
			34		30			

Аналогично перенесем числа 16, 34, 12, 30:

		21	34	17	30	13		
	26		22	35	18		14	
31		27		23		19		15
	32		28	11	24		20	
		33	16	29	12	25		

Далее перенесем число 31 направо на 5 клеточек, а число 15 налево на 5 клеточек.

	21	34	17	30	13	
26		22	35	18		14
	27	15	23	31	19	
32		28	11	24		20
	33	16	29	12	25	

Аналогично перенесем числа 26, 32, 14, 20.

21	34	17	30	13
14	22	35	18	26
27	15	23	31	19
20	28	11	24	32
33	16	29	12	25

Получили магический квадрат с суммой 115 по любой строке, столбцу и диагонали.

Отметим еще раз, что начинать мы можем с любого числа, главное, чтобы это были последовательные числа.

Упражнение 9. Постройте магический квадрат пятого порядка, начиная с 5 до 29. Рассуждая аналогично, получите:

				5				
			10		6			
		15		11		7		
	20		16		12		8	
25		21		17		13		9
	26		22		18		14	
		27		23		19		
			28		24			
				29				

15	28	11	24	7
8	16	29	12	20
21	9	17	25	13
14	22	5	18	26
27	10	23	6	19

Проверьте и убедитесь сами в том, что вы правильно поняли алгоритм построения магического квадрата нечетного порядка.

$$M_4 = f_4(5) = \frac{5 \cdot (5^2+1)}{2} + 5 \cdot 4,$$

тогда $M_4 = f_4(5) = 85$, что верно.

Отметим также, что возможно построение не только начиная с любого натурального числа, но и с любым постоянным интервалом между числами. Например, постройте магический квадрат пятого порядка начиная с 3 до 75 с интервалом, равным 3.

				3				
			18		6			
		33		21		9		
	48		36		24		12	
63		51		39		27		15
	66		54		42		30	
		69		57		45		
			72		60			
				75				

33	72	21	60	9
12	36	75	24	48
51	15	39	63	27
30	54	3	42	66
69	18	57	6	45

Магический квадрат с суммой 195 по любой стороне, столбцу и диагонали построен.

Известны некоторые способы построения магических квадратов также и четного порядка.

а) Первоначально рассмотрим построение нормального магического квадрата четвертого порядка, т. е. 4×4. Запишем его последовательно, двигаясь слева направо, сверху вниз, натуральными числами от 1 до 16.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

б) Временно числа, находящиеся на диагоналях квадрата, исключим. Получим таблицу чисел

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

в) Затем пустые клетки заполняем временно исключенными числами в порядке возрастания, двигаясь справа налево снизу вверх. Получим таблицу чисел,

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

где

$16+5+9+4=2+11+7+14=3+10+6+15=13+8+12+1=34;$

$16+2+3+13=5+11+10+8=9+7+6+12=4+14+15+1=34;$

$16+11+6+1=4+7+10+13=34.$

Значит, это действительно нормальный магический квадрат, у которого сумма всех чисел по любой строке, столбцу, диагонали равна 34. Будем считать его исходным для дальнейших преобразований.

Отметим, что используя свойства симметрии относительно срединных перпендикуляров к каждой стороне квадрата и постоянства суммы чисел по строкам и столбцам, можно из *исходного* магического квадрата получить еще несколько магических квадратов.

1. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* путем перестановки местами первого и четвертого столбцов.

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

2. Данный магический квадрат получен из *исходного* перестановкой второго и третьего столбцов.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

3. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* перестановкой первой и четвертой строки.

4	14	15	1
5	11	10	8
9	7	6	12
16	2	3	13

4. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* перестановкой второй и третьей строки.

16	2	3	13
9	7	6	12
5	11	10	8
4	14	15	1

Естественно, можно одновременно комбинировать два преобразования — по строкам и столбцам. Также можно одновременно комбинировать два преобразования и по строкам и по столбцам вперемешку.

5. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* одновременной перестановкой первого и четвертого, а также второго и третьего столбцов.

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

6. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* одновременной перестановкой первой и четвертой, а также второй и третьей строк.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

7. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* одновременной перестановкой первого и четвертого столбцов, а также второй и третьей строк.

13	2	3	16
12	7	6	9
8	11	10	5
1	14	15	4

8. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* одновременной перестановкой второго и третьего столбцов, а также первой и четвертой строк.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

Интересно рассмотреть симметрию относительно каждой из диагоналей исходного магического квадрата.

9. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* симметричной перестановкой относительно диагонали.

1	12	8	**13**
15	6	**10**	3
14	**7**	11	2
4	9	5	16

10. Данный нормальный магический квадрат получен из *исходного* симметричной перестановкой относительно другой диагонали.

16	5	9	4
2	**11**	7	14
3	10	**6**	15
13	8	12	**1**

Отметим, что:

а) магический квадрат **9** может быть получен из **6** поворотом на 90° в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки;

б) магический квадрат **10** может быть получен из **5** поворотом на 90° также против часовой стрелки;

в) магический квадрат **8** может быть получен из магического квадрата **7** поворотом на 180°, и наоборот, магический квадрат **7** может быть получен из магического квадрата **8** поворотом на 180°;

г) аналогично — магические квадраты **5** и **6**.

Примечание. Отметим, что нормальный магический квадрат **2** известен тем, что он изображен знаменитым художником эпохи Возрождения Альбрехтом Дюрером на картине «Меланхолия» в 1514 г., причем в нижней строчке есть числа 15 и 14 — своеобразный автограф великого художника, указывающий на год создания картины. На полотне также зашифрован год рождения художника — 1471.

С математической точки зрения любопытно, что сумма всех чисел в предъявленных квадратах второго порядка, т. е. в угловых и центральном, также равна 34:

для *исходного* магического квадрата

16	2
5	11

3	13
10	8

9	7
4	14

6	12
15	1

11	10
7	6

16	13
4	1

для магического квадрата Альбрехта Дюрера

16	3
5	10

2	13
11	8

9	6
4	15

2	15
14	1

10	11
6	7

16	13
4	1

Упражнение 10. Самостоятельно постройте магический квадрат четвертого порядка от 2 до 47 с интервалом между числами, равным 3.

2	5	8	11
14	17	20	23
26	29	32	35
38	41	44	47

Проверьте, убедитесь в том, что правильно поняли алгоритм построения магического квадрата четвертого порядка:

47	5	8	38
14	32	29	23
26	20	17	35
11	41	44	2

Так как сумма всех чисел в любой строке, столбце, диагонали равна 98, то это действительно магический квадрат.

Отметим, что в полученном магическом квадрате сумма всех чисел в угловых и центральном квадратах второго порядка также равна 98.

Рассмотрим шифрограмму, написанную шифролентой с использованием нормального магического квадрата.

Прочитайте шифротекст:

Я	О	П	Я	Т	В	О	А	Л	И	Н	С	П	П	Я	А
Н	Р	Е	Н	А	Н	О	Т	И	М	К	П	М	Р	О	С
В	К	О	В	О	О	Л	О	Г	Я	П	Е	П	Я	И	В
А	Т	Ы	Я	Т	И	Я	Ц	Д	О	К	И	Л	Б	Р	Т

Так как в шифротексте 64 буквы, используем для расшифровки нормальный магический квадрат восьмого порядка. Первично это квадрат 8×8 с последовательными числами от 1 до 8^2. Заполним этот квадрат:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Так как квадрат четного порядка, то разделим его на четыре квадрата четвертого порядка и воспользуемся способом получения магического квадрата четного порядка на с. 344.

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Нормальный магический квадрат с суммой по любой строке, столбцу и диагонали, равной 260, построен.

Теперь переведем шифроленту в таблицу 8×8.

Я	О	П	Я	Т	В	О	А
Л	И	Н	С	П	П	Я	А
Н	Р	Е	Н	А	Н	О	Т
И	М	К	П	М	Р	О	С
В	К	О	В	О	О	Л	О
Г	Я	П	Е	П	Я	И	В
А	Т	Ы	Я	Т	И	Я	Ц
Д	О	К	И	Л	Б	Р	Т

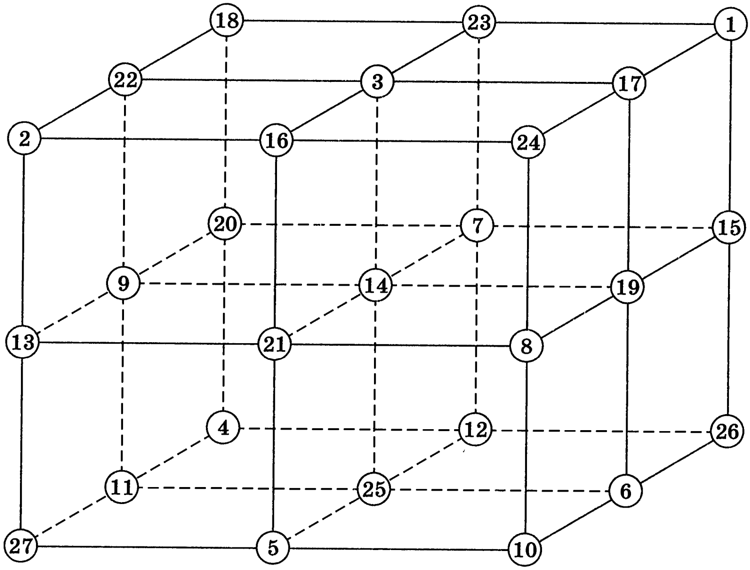
.

Далее сопоставим каждому числу нормального магического квадрата в порядке возрастания соответствующую букву из шифротаблицы:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Т	О	П	Л	И	В	О	Д	Л	Я	И	С	П	Ы	Т	А
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Н	И	Я	Н	А	П	Я	Т	О	М	К	О	В	Р	О	В
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
С	К	О	М	П	О	Л	И	Г	О	Н	Е	П	Е	Р	В
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
А	Я	П	Я	Т	Н	И	Ц	А	О	К	Т	Я	Б	Р	Я

Шифротекст дешифрован: «Топливо для испытания на пятом ковровском полигоне первая пятница октября».

Отметим также, что возможен пространственный вариант магического куба третьего порядка. Его особенностью является то, что все грани куба таковы, что сумма только по любым строкам и столбцам постоянна и равна 42.



Грани этого куба выглядят так:

Лицевая грань

2	16	24
13	21	8
27	5	10

Задняя грань

18	23	1
20	7	15
4	12	26

Правая грань

24	17	1
8	19	15
10	6	26

Левая грань

2	22	18
13	9	20
27	11	4

Нижняя грань

27	11	4
5	25	12
10	6	26

Верхняя грань

2	22	18
16	3	23
24	17	1

Если рассматривать любые диагонали диагональных сечений куба или, что одно и то же, диагонали куба, то сумма всех чисел, находящихся на них, также равна 42:

$$18 + 14 + 10 = 4 + 14 + 24 = 2 + 14 + 26 = 27 + 14 + 1 = 42.$$

Отметим, что если провести через центр куба плоскости, параллельные граням куба, то, во-первых, таких плоскостей будет только три; во-вторых, эти плоскости будут взаимно перпендикулярны; в-третьих, сечения куба есть магические квадраты, у которых сумма чисел по строкам, столбцам и диагоналям также равна 42:

22	3	17
9	14	19
11	25	6

16	3	23
21	14	7
5	25	12

13	9	20
21	14	7
8	19	15

Очевидно, что создать такой шедевр очень трудно. Известно, что придумал такой магический куб гениальный математик Леонард Эйлер.

Теперь рассмотрим построение магического квадрата восьмого порядка для натуральных чисел от 10 до 73.

Разделим квадрат 8×8 на квадраты четвертого порядка. Таких будет только четыре. Далее в каждом из них временно исключим числа, находящиеся на диагоналях этих квадратов.

10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57
58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73

Затем пустые клетки заполним временно исключенными числами в порядке возрастания, двигаясь справа налево, снизу вверх по всему исходному квадрату 8×8.

	11	12			15	16	
18			21	22			25
26			29	30			33
	35	36			39	40	

	43	44			47	48	
50			53	54			57
58			61	62			65
	67	68			71	72	

73	11	12	70	69	15	16	66
18	64	63	21	22	60	59	25
26	56	55	29	30	52	51	33
49	35	36	46	45	39	40	42
41	43	44	38	37	47	48	34
50	32	31	53	54	28	27	57
58	24	23	61	62	20	19	65
17	67	68	14	13	71	72	10

Магический квадрат с суммой, равной 322 по любой строке, столбцу и диагонали построен.

Известно, что таким способом можно построить любой магический квадрат, порядок которого есть степень числа 2, 4, 8, 16, ..., 2^n и т. д.

Отметим, что мы рассмотрели построение только нескольких видов магических квадратов. К сожалению, до сих пор общего метода построения магических квадратов произвольного порядка нет.

Примечание. С развитием книгопечатания и появлением периодических печатных изданий в XIX в. стал возможен «книжный шифр». Для его использования источнику информации и адресату нужно обладать одинаковым печатным изданием (книгой, газетой, журналом). Процесс шифрования сообщения состоял в указании номера страницы, номера строки и столбца, в котором располагалась шифруемая букв сообщения. Учтем, что даже если его перехватить, то расшифровать его без помощи ключа, которым являлось название книги или газеты, практически невозможно.

Самостоятельная работа 5

По данным таблицам чисел постройте магические квадраты.

1. Для натуральных чисел от 5 до 29 с интервалом, равным 3.

5	8	11
14	17	20
23	26	29

2. Для натуральных чисел от 3 до 33 и интервалом, равным 2.

3	5	7	9
11	13	15	17
19	21	23	25
27	29	31	33

3. Для натуральных чисел от 1 до 193 с интервалом, равным 4.

1	5	9	13	17	21	25
29	33	37	41	45	49	53
57	61	65	69	73	77	81
85	89	93	97	101	105	109
113	117	121	125	129	133	137
141	145	149	153	157	161	165
169	173	177	181	185	189	193

4. Для натуральных чисел от 2 до 191 с интервалом, равным 3.

2	5	8	11	14	17	20	23
26	29	32	35	38	41	44	47
50	53	56	59	62	65	68	71
74	77	80	83	86	89	92	95
98	101	104	107	110	113	116	119
122	125	128	131	134	137	140	143
146	149	152	155	158	161	164	167
170	173	176	179	182	185	188	191

Ответы на самостоятельную работу 5

По данным таблицам чисел постройте магические квадраты.

1. С постоянной суммой по всем столбцам, строчкам и диагоналям, равной 51.

14	29	8
11	17	23
26	5	20

2. С постоянной суммой по всем столбцам, строчкам и диагоналям, равной 72.

33	5	7	27
11	23	21	17
19	15	13	25
9	29	31	3

3. С постоянной суммой по всем столбцам, строчкам и диагоналям, равной 679.

85	185	61	161	37	137	13
17	89	189	65	165	41	113
117	21	93	193	69	141	45
49	121	25	97	169	73	145
149	53	125	1	101	173	77
81	153	29	129	5	105	177
181	57	157	33	133	9	109

4. С постоянной суммой по всем столбцам, строчкам и диагоналям, равной 772.

191	5	8	182	179	17	20	170
26	184	181	35	38	152	149	47
50	140	137	59	62	128	125	71
119	77	50	110	107	89	92	98
95	101	104	86	83	113	116	74
122	68	65	131	134	56	53	143
146	44	41	155	158	32	29	107
23	173	176	14	11	185	188	2

Другие виды перестановок

1. Рассмотрим еще некоторые виды перестановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

где a_1 — номер места шифроместа, на которое показывает первая буква исходного сообщения при выбранном преобразовании; a_2 — номер места для второй буквы и т. д. Таблица такого вида называется «подстановкой степени n».

Из простейших соображений комбинаторики вариантов перестановки n чисел будет $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$.

Зная подстановку задающего преобразования, можно осуществить шифровку, а затем последующую расшифровку сообщения.

Пример. Зашифруем ключ-слово «Армагеддон» и прочитаем зашифрованное слово.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 10 & 1 & 3 & 6 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} \text{А} & \text{Р} & \text{М} & \text{А} & \text{Г} & \text{Е} & \text{Д} & \text{Д} & \text{О} & \text{Н} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что это слово «Ронамедгад», где число возможных вариантов равно $10! = 3\,628\,800$ — т. е. вручную перебрать все варианты расшифровки весьма проблематично.

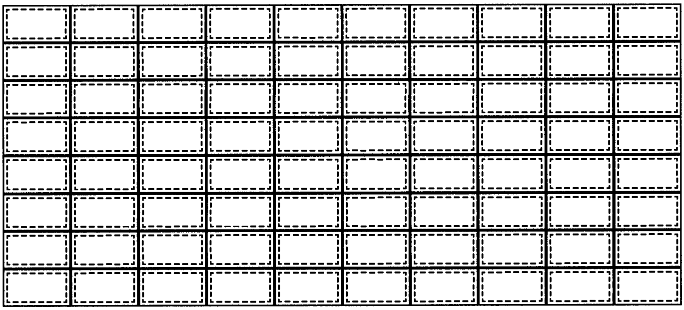
2. Рассмотрим таблицу-решетку размером 8×10 и приведем пример шифра перестановки.

Отметим, что базовая решетка вырезов должна быть *антисимметричной* относительно вертикали, проведенной через середины противоположных сторон, и горизонтали, проведенной через середины противоположных сторон. Это нужно для того, чтобы при повороте на $180°$, перевертывании и вновь повороте на $180°$ клетки вырезов не совпадали. Причем их должно быть только 20, так как в данном случае $a = 4$, $\quad b = 5 \quad (2a = 8;\ 2b = 10)$.

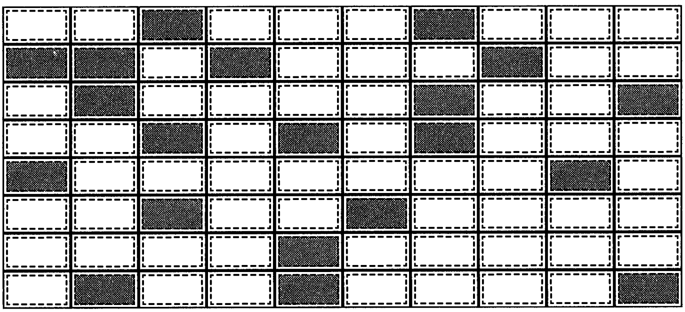
Запишем в клетки, вырезанные в ключе-решетке, последовательно шифруемый текст по двадцать букв в каждом положении решетки.

10

8



Ключ-решетка 8×10:



Для упрощения набора будем рассматривать более простой вид изображения решетки.

а) Зашифруем текст «любовь нечаянно нагрянет, когда ее совсем не ждешь, разочарованья и томленья за этим иногда идут» при помощи ключа-решетки.

		Л				Ю			
Б	О		В				Ь		
	Н					Е			Ч
		Ф		Я		Н			
Н								О	
		Н			А				
				Г					
	Р			Я					Н

б) Повернем решетку на 180°.

Е					Т			К	
					О				
				Г			Д		
	А								Е
			Е		С		О		
В			С					Е	
		М				Н		Е	Ж
			Д				Е		

в) Перевернем первоначальную таблицу вырезов на другую сторону относительно горизонтали (середины) и продолжим запись текста.

	Ш			Ь					Р
				А					
		З			О				
Ч								А	
		Р		О		В			
	А					Н			Ь
Я	И		Т				О		
		М				Л			

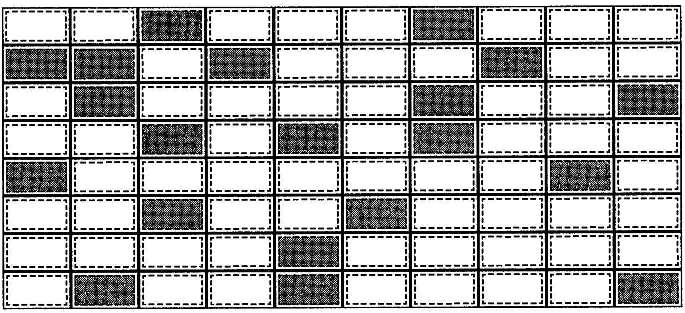
г) Теперь можно предыдущую таблицу в) повернуть на 180° и записать оставшуюся часть текста.

			Е				Н		
		Ь				Я		З	А
Э			Т					И	
			М		И		Н		
	О								Г
				Д			А		
					И				
Д					У			Т	

Теперь совместим четыре таблицы вырезов с частью осмысленного текста на каждой из них, тогда получим шифротекст, прочитать который без ключа-таблицы весьма сложно. Получим шифротекст в виде данной таблицы.

Е	Т	Л	Е	Ь	Т	Ю	Н	К	Р
Б	О	Ь	В	А	О	Я	Ь	З	А
Э	Н	З	Т	Г	О	Е	Д	И	Ч
Ч	А	А	М	Я	И	Н	Н	А	Е
Н	О	Р	Е	О	С	В	О	О	Г
В	А	Н	С	Д	А	Н	А	Е	Ь
Я	И	М	С	Г	И	Н	О	Е	Ж
Д	Р	М	Д	Я	У	Н	У	Т	Н

Ключ-шифр вырезов для шифрования и дешифровки один и тот же.



Расшифровать текст можно, последовательно применив ключ-таблицу в обратном порядке. Попробуйте сделать это самостоятельно и проверьте, получится ли исходный текст: «любовь нечаянно нагрянет, когда ее совсем не ждешь, разочарованья и томленья за этим иногда идут».

Рассмотрим в общем виде шифры перестановки — решетки. Для этого изготавливается прямоугольный трафарет размера $2a \times 2b$ клеток, причем в трафарете вырезается $a \cdot b$ клеток. Естественно, при наложении такого трафарета на такой же лист, весь лист покроется четырьмя положениями решетки, причем количество ключей-перестановок равно $4^{a \cdot b}$.

Конечно, шифром можно передать только текст длиной $4ab$ букв, число перестановок же равно $(4ab)!$.

При размере трафарета 8×8 это дает больше $4 \cdot 10^9$ вариантов ключей.

Историческая справка

В 1550 г. Джироламо Кардано (1501–1576) одним из первых разработал метод шифрования и дешифрования секретных сообщений с помощью решеток. Впоследствии этот способ активно использовал французский кардинал Ришелье (1585–1642) в своей переписке с влиятельными деятелями Европы.

Отметим, что Дж. Кардано — известный итальянский математик, инженер, философ и врач. С 1534 г. профессор университетов Милана и Болоньи.

Дж. Кардано известен поиском общих формул решения уравнений третьей и четвертой степени. В книге «Великое искусство, или о правилах алгебры» (1545 г.) были систематически изложены современные на тот момент методы решения уравнений второй, третьей и даже четвертой степени. В результате он одним из первых допустил возможность отрицательных корней в уравнениях. В этой же книге рассматривался метод-формула решения уравнений четвертой степени, разработанный его учеником Людовико Феррари (1522–1565), о чем с благодарностью к своему ученику упомянул Дж. Кардано[2].

Под влиянием идей итальянского инженера-математика Рафаэля Бомбелли (1526–1572) Дж. Кардано использовал мнимые величины. Позже, в 1572 г., незадолго до своей смерти Бомбелли в книге «Алгебра» подробно и конструктивно изложил свое понимание «комплексных чисел», а название комплексные такие числа уже получили в работах Ф. Гаусса (1777–1855).

В механике Кардано известен разработкой теории рычагов, на основе которой был построен карданный вал, используемый в машиностроении и автомобилестроении.

Справедливости ради отметим, что способ решения кубических уравнений ему в частной беседе сообщил Николо Тартальи (1500–1557). Опубликование этого метода-формулы без согласия и упоминания его автора привело к смертельной вражде между ними.

---

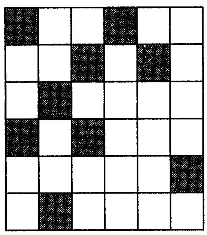
[2] Более подробно о методах см. А. Х. Шахмейстер. Комплексные числа. М. — СПб., 2011, 2016.

Самостоятельная работа 6

1. Текст открытого сообщения представляет собой таблицу букв.

Д	Р	Е	В	У	К
В	А	А	К	Щ	Ы
З	Е	Л	У	Щ	Г
Н	И	К	Е	О	К
Е	Л	Щ	К	Е	А
Т	Щ	Е	К	Г	

Адресату была известна таблица решетка-ключ.



Расшифруйте данное сообщение при помощи таблицы-ключа.

а) Для прочтения текста необходимо вначале прочитать часть сообщения при помощи таблицы-решетки.

б) Исходную таблицу-решетку необходимо повернуть на 180° относительно вертикали, проведенной через середину противоположных сторон.

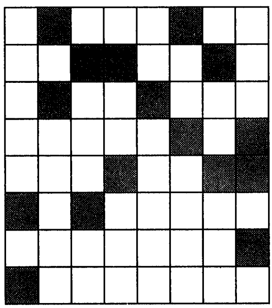
в) Исходную таблицу-решетку необходимо повернуть на 180° относительно горизонтали, проведенной через середину противоположных сторон.

г) Исходную таблицу-решетку, полученную в результате преобразования б), необходимо повернуть на 180° относительно горизонтали, проведенной через середину противоположных сторон.

2. Текст открытого сообщения представляет собой таблицу букв.

Ж	Я	Н	Ы	Л	Е	А	Т
Р	П	Х	А	О	Ы	Л	М
Л	А	Ч	Н	Д	А	У	С
Т	Н	А	В	Ы	О	С	М
М	К	Т	О	А	Т	Й	Д
У	К	Ш	Е	В	И	П	А
М	Л	Т	М	Ы	М	К	А
Б	О	Н	С	Е	О	Е	С

Адресату была известна таблица решетка-ключ.



Для прочтения текста необходимо вначале прочитать часть сообщения при помощи таблицы-решетки, а затем таблицу-решетку трижды последовательно повернуть на: 90°, 180°, 270° против часовой стрелки и прочитать оставшиеся части текста.

Решение самостоятельной работы 6

Покажем результаты наложения шифр-решетки по данным правилам на шифр-таблицу.

1. а) Для прочтения текста необходимо вначале прочитать часть сообщения при помощи таблицы-решетки.

Д			В		
		А		Щ	
	Е				
Н		К			
					А
	Щ				

б) Исходную таблицу-решетку необходимо повернуть на 180° относительно вертикали, проведенной через середину противоположных сторон.

		Е			К
	А		К		
				Щ	
			Е		К
Е					
				Г	

в) Исходную таблицу-решетку необходимо повернуть на 180° относительно горизонтали, проведенной через середину противоположных сторон.

	Р				
					Ы
З		Л			
	И				
		Щ		Е	
Т			К		

г) Исходную таблицу-решетку, полученную в результате преобразования б), необходимо повернуть на 180° относительно горизонтали, проведенной через середину противоположных сторон.

				У	
В					
			У		Г
				О	
	Л		К		
		Е			

Итоговый текст шифр-таблицы: «Два щенка щека к щеке грызли щетку в уголке».

2. а) Первоначальное положение ключа-решетки:

	Я				Е		
		Х	А			Л	
	А			Д			
					О		М
			О			Й	Д
У		Ш					
							А
Б							

б) Поворот на 90° против часовой стрелки ключа-решетки:

			Ы	Л		А	
	П			О			
Л			Н				
		А					
	К			А			
	К				И		
М		Т					
					О		С

в) Поворот на 180° против часовой стрелки ключа-решетки:

							Т
Р							
					А		С
Т	Н			Ы			
М		Т					
			Е			П	
	Л			Ы	М		
		Н				Е	

г) Поворот на 270° против часовой стрелки ключа-решетки:

Ж		Н					
					Ы		М
		Ч				У	
			В			С	
					Т		
				В			О
			М			К	
	О		С	Е			

Ответ: «Я ехала домой, душа была полна каким-то страстным, теплым, нежным чувством к Осе».

Некоторые выводы из рассмотренных ранее задач

1. Процесс преобразования открытого сообщения в шифрованное будет называться шифрованием.

   Адресату заранее должно быть известно, как из полученного зашифрованного сообщения можно получить открытое. Процесс получения исходного сообщения называется расшифровыванием.

2. Положим, под буквой А мы будем понимать открытое сообщение, а под В зашифрованное. Под S — правило шифрования, под g — правило расшифровывания.

   $S(A)=B$ — шифрование, $g(B)=A$ — расшифровывание.

3. Однотипные правила зашифровывания можно объединить в классы. Причем внутри данного класса правила различаются между собой по значениям некоторого параметра, которое может быть числом, таблицей, функцией и т. д.

   В криптографии конкретное значение параметра таблицы, функции обычно называется ключом. Как правило, шифрование производится с использованием специальных устройств. Естественно, при этом должна быть возможность изменять значение параметра устройства, чтобы зашифрованный текст нельзя было расшифровать противнику, имеющему точно такое же устройство, но не знающему значения выбранного источником информации параметра — ключа.

   Иногда процесс шифрования с ключом α записывают $f_\alpha(A) = B$, а процесс расшифровки $q_\alpha(B) = A$.

   Разумеется, источник информации и адресат должны знать ключ.

4. Среди всех шифров можно выделить два больших класса: шифры перестановки и шифры замены.

   а) Шифрами перестановки называются шифры преобразования, которые приводят к изменению только порядка следования символов исходного текста. Например, шифр «Сцитала» (см. с. 320).

б) Шифрами замены называются шифры, которые приводят к замене каждого символа открытого сообщения на другие символы — шифрообозначения, причем порядок следования сохраняется. Например, замена букв алфавита на цифры по определенному правилу (см. с. 327).

в) Но чаще используются комбинированные шифры, т. е. шифры перестановки и замены в определенных заранее порядке и комбинации. Например, упражнение 8, с. 332.

Значительно позднее обобщением подстановки Цезаря стал шифр Хилла (1890–1961, США), а затем и шифр Плейфера (1918–1998), смысл которых основан на подстановке не отдельных символов, а биграмм (шифр лорда Лайона Плейфера, изобретенный сэром Чарльзом Уитстоном в 1854 г.) и n-грамм (шифр Лестера Хилла, запатентованный в 1929 г. американским математиком и основанный на модульной арифметике теории сравнений и матричной теории линейной алгебры).

Естественно, при более высокой криптоустойчивости они значительно сложнее для реализации и требуют достаточно большого количества ключевой информации. Одной из модификаций шифра является шифр Гронсфельда (XVIII в.), дающий числовой ключ. То есть при шифровании происходит сдвиг не на постоянную величину, а на цифру, указанную под шифруемой буквой в ключе. Отметим, что в развитие идей шифра Цезаря появилась *аффинная* криптосистема и т. д.

Примером шифра замены является шифр Атбаш (до н. э.). Алгоритм этого шифра прост! Первая буква алфавита заменяется на последнюю, вторая на предпоследнюю и т. д. Для дешифрования полученного сообщения достаточно знать алфавит послания. Еще средневековые криптоаналитики считали, что в Ветхом Завете ряд священных текстов зашифрован. Как выяснилось позже, для этого использовали шифр подстановки Атбаш в оригинальном тексте Ветхого Завета. Так, в книге пророка Иеремии (25:26) слово «Бабель» (Вавилон) зашифровано как Шешах (Еврейская Библия начала XVIII века). В рассказе английского писателя Артура Конан Дойля «Пляшущие человечки» описан шифр-замена, где буквы заменялись нарисованными человечками в разных позах. В этом рассказе великий сыщик Шерлок Холмс разгадывает этот таинственный шифр. Задолго до Цезаря греческий историк Полибий (ок. 200 г. до н. э. — ок. 120 г. до н. э.) создал свою систему шифрования. Для шифрования он использовал квадрат 5×5 (размер квадрата, естественно, определяется мощностью, т. е. количеством букв используемого алфавита). Для русского алфавита необходим квадрат 6×6, и в процессе шифрования каждой букве ставится в соответствие пара чисел — номер столбца и номер строки, на пересечении которых располагается шифруемая буква. Рассмотрим использование этого шифра на примере русского алфавита, в котором даже в сокращенном варианте 30 букв (без й, ё, ъ). Для этого необходимо рассмотреть квадрат 6×6. Шесть пустых неиспользованных клеток разместим в определенном порядке в таблице.

	1	2	3	4	5	6
1	А	Б	В	Г	Д	Е
2	Ж	З	И	К	Л	М
3	Н	О	П	Р	С	Т
4	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш
5	Щ		Ь		Ю	
6		Ы		Э		Я

Зашифруем известные строки песни «Любовь нечаянно нагрянет, когда ее совсем не ждешь».

52	55	21	23	31	35	13	61	54	11	61	13	13	23
13	11	41	43	66	13	61	63	42	23	41	51	11	61
61	53	23	31	53	61	62	13	61	12	51	61	64	35

Л	Ю	Б	О	В	Ь	Н	Е	Ч	А	Я	Н	Н	О
Н	А	Г	Р	Я	Н	Е	Т	К	О	Г	Д	А	Е
Е	С	О	В	С	Е	М	Н	Е	Ж	Д	Е	Ш	Ь

Очевидно, что такой способ с позиции современности не обладает достаточной криптоустойчивостью в силу отсутствия уникального ключа. Кроме того, при шифровании таким способом происходит увеличение размера зашифрованного сообщения. Но для того времени это был достаточно надежный шифр.

Известен также модифицированный вариант квадрата Полибия — так называемый тюремный шифр.

	1	2	3	4	5	6
1	Б	А	Р	С	Е	Л
2	О	Н	В	Г	Д	Ж
3	З	И	К	М	П	Т
4	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш
5	Щ		Ь		Ю	
6		Ы		Э		Я

Берется некоторое ключевое слово, например, $\boxed{\text{БАРСЕЛОНА}}$, из него удаляются повторяющиеся буквы. В оставшиеся клетки записываются остальные буквы алфавита в обычном порядке следования, но из них удаляются буквы, присутствующие в ключевом слове. Попробуем дальше записать последовательность цифр, шифрующих предыдущие строчки песни.

61	55	11	12	32	35	22	51	54	21	66	22	22	12
Л	Ю	Б	О	В	Ь	Н	Е	Ч	А	Я	Н	Н	О
22	11	42	31	66	22	51	63	33	12	42	52	21	51
Н	А	Г	Р	Я	Н	Е	Т	К	О	Г	Д	А	Е
51	41	12	32	41	51	43	22	51	62	52	51	64	35
Е	С	О	В	С	Е	М	Н	Е	Ж	Д	Е	Ш	Ь

Ленточный «тюремный» шифротекст будет таким:

61, 55, 11, 12, 32, 35, 22, 51, 54, 21, 66, 22, 22, 12, 22, 11, 42, 31, 66, 22, 51, 63, 33, 12, 42, 52, 21, 51, 51, 41, 12, 32, 41, 51, 43, 22, 51, 62, 52, 51, 64, 35.

Китайская теорема об остатках

Пример 1

Необходимо найти число x, зная, что при делении его на 2 остаток равен 1, при делении на 5 остаток равен 3.

Решить такую задачу можно, подобрав такое число x, которое удовлетворяет условию задачи. Представим условие в виде системы сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}.$$

Один из способов решения — подбор необходимого x.

Для удобства запишем поиск решения в таблицу 8. В первой строке записаны различные значения $k \in [0, 1, \ldots, 19]$, во второй строке записаны остатки от деления числа k на 2, строка три содержит все остатки от деления на 5.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x \equiv k \pmod 2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \equiv k \pmod 5$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$x \equiv k \pmod 2$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \equiv k \pmod 5$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4

Таблица 8

Поиск решения состоит в подборе столбца k, в котором записан остаток 1 при делении на 2 и остаток 3 при делении на 5.

Как видно из таблицы 1, решением задачи будет набор чисел 3, 13,23... Если внимательно посмотреть на столбцы, где $k = 0, 1, \ldots, 9$, то можно увидеть, что в столбцах перечислены все такие же возможные варианты остатков, которые получаются при делении k на 2 и 5 и в наборе, где $k = 10, 11, \ldots, 19$.

Эти остатки повторяются в силу того, что при делении на 2 получается два остатка, 0 и 1, а при делении на 5 получаем остатки $0, 1, \ldots, 4$. Тогда количество всех возможных комбинации равно $2 \cdot 5 = 10$.

Лемма 1. Если дана пара взаимно простых делителей m_1 и m_2 и остатки от деления на эти делители r_1 и r_2, то найдется единственное число x на интервале от 0 до $m_1 \cdot m_2 - 1$, которое будет давать остаток r_1 при делении на m_1 и остаток r_2 при делении на m_2.

Лемма 2. Если найдено число x на интервале от 0 до $m_1 \cdot m_2 - 1$, которое будет давать остаток r_1 при делении на m_1 и остаток r_2 при делении на m_2, то решение повторяется с периодом $m_1 \cdot m_2$. Значит, мы получим набор решений $x \pm t \cdot m_1 \cdot m_2$, где t — целое число.

Пример 2

Рассмотрим пример, иллюстрирующий Лемму **1** и Лемму **2**.

а) Рассмотрим деление числа 943 на числа 17 и 13, где $(17, 13) = 1$.

$943 = 17 \cdot 55 + 8; \quad 943 = 13 \cdot 72 + 7.$

Итак: $m_1 = 17, \quad r_1 = 8; \quad m_2 = 13, \quad r_2 = 7.$

Следовательно, $m_1 \cdot m_2 = 17 \cdot 13 = 221$, т. е. 221 — период.

б) $943 + 221 = 1164$,

тогда $1164 = 17 \cdot 68 + 8; \quad 1164 = 13 \cdot 89 + 7.$

в) Пусть $943 + 3 \cdot 221 = 943 + 663 = 1606$.

Тогда $1606 = 17 \cdot 94 + 8; \quad 1606 = 13 \cdot 123 + 7.$

Следовательно, $943 \pm t \cdot 221$, где $t \in \mathbb{Z}$, — все числа, которые при делении на 17 имеют остаток 8, а при делении на 13 имеют остаток 7.

г) Так как $943 - 4 \cdot 221 = 943 - 884 = 59$,

то $59 = 17 \cdot 3 + 8; \quad 59 = 13 \cdot 4 + 7$.

Следовательно, $59 \pm t \cdot 221$ — множество всех чисел, которые при делении на 17 имеют остаток 8, а при делении на 13 имеют остаток 7 — иллюстрация Леммы **2**.

Отметим, что $59 \in (0; 220)$, т. е. $59 \in (0; 17 \cdot 13 - 1)$.

Значит, на интервале существует единственное число 59, которое будет иметь остаток 8 при делении на 17 и остаток 7 при делении на 13 — иллюстрация Леммы **1**.

Пример 3. Добавим еще один делитель в пример 1, тогда задачу можно сформулировать так:

Найдите число x, зная, что деление на 2 дает остаток 1, деление на 5 дает остаток 3, а деление на 3 дает остаток 2.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}.$$

Запишем поиск решения в таблицу 9, где часть таблицы взяли из предыдущего примера, но добавили столбец для делителя 3.

Алгоритм поиска остался таким же: необходимо подобрать такую строку, в которой есть необходимые нам остатки 1, 3, 2. Как видно, это строка 23 по столбцу k.

Если внимательно посмотреть на все $k = 0, 1, \ldots, 29$, то нет ни одной строки, в которой повторяются делители. Число таких строк 30, это число получается из произведения попарно простых делителей и равно $2 \cdot 5 \cdot 3$.

Лемму **1** и Лемму **2** можно обобщить и на более сложный случай, только период тогда вычисляется не произведением пары делителей, а произведением всех делителей. Главное, чтобы эти делители были попарно взаимно просты.

k	$x \equiv k \pmod 2$	$x \equiv k \pmod 5$	$x \equiv k \pmod 3$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	2	2
3	1	3	0
4	0	4	1
5	1	0	2
6	0	1	0
7	1	2	1
8	0	3	2
9	1	4	0
10	0	0	1
11	1	1	2
12	0	2	0
13	1	3	1
14	0	4	2
15	1	0	0
16	0	1	1
17	1	2	2
18	0	3	0
19	1	4	1
20	0	0	2
21	1	1	0
22	0	2	1
23	1	3	2
24	0	4	0
25	1	0	1
26	0	1	2
27	1	2	0
28	0	3	1
29	1	4	2
30	0	0	0

Таблица 9

Пример 4. Найдите x, если:

а) $x \equiv 1 \pmod 3$; $\quad x \equiv 2 \pmod 5$;

б) $x \equiv 1 \pmod 2$; $\quad x \equiv 1 \pmod 5$; $\quad x \equiv 2 \pmod 3$.

Решение

а) $x \equiv 1 \pmod 3$; $\quad x \equiv 2 \pmod 5$,

тогда очевидно, что $\begin{cases} r_1 = 1 & m_1 = 3 \\ r_2 = 2 & m_2 = 5 \end{cases}$.

Исходя из таблицы 9, в строке $k=7$, находим необходимые остатки — $\begin{cases} 7 \equiv 1 \pmod 3 \\ 7 \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$, значит $x=7$ — единственное решение, принадлежащее интервалу $(0; 3 \cdot 5 - 1) = (0; 14)$.

Далее в таблице 9 для $k = 22$ — остатки те же:

$\begin{cases} 22 \equiv 1 \pmod 3 \\ 22 \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$ — верно.

Тогда $\{7 \pm t \cdot 3 \cdot 5\}$ — множество всех решений системы сравнений, где $t \in \mathbb{Z}$.

б) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} r_1 = 1 & m_1 = 2 \\ r_2 = 1 & m_2 = 5 \\ r_3 = 2 & m_3 = 3 \end{cases}$.

Из таблицы 9 найдем строку $k = 11$, в которой есть необходимые остатки, причем $k \in (0; 2 \cdot 5 \cdot 3 - 1) = (0; 29)$.

Значит $x = 11$ или $\begin{cases} 11 \equiv 1 \pmod 2 \\ 11 \equiv 1 \pmod 5 \\ 11 \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$.

Следовательно, $\{11 \pm t \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3\}$ — множество всех решений системы сравнений, где $t \in \mathbb{Z}$.

После рассмотрения примеров сформулируем Китайскую теорему об остатках:

<u>Китайская теорема об остатках</u>. Пусть даны n попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ и остатки от деления на эти числа: $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_n$. Тогда существует число x, которое дает при делении на m_i остаток r_i для любых $i \in [1; n]$.

Запишем в общей форме в приведенных выше обозначениях условия примера 3, тогда:

$$\text{Из } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \text{ следует } \begin{cases} r_1 = 1 & m_1 = 2 \\ r_2 = 1 & m_2 = 5 \\ r_3 = 2 & m_3 = 3 \end{cases}.$$

Найдем решение системы сравнений *без использования таблицы 9*. Для этого используем аппарат теории сравнений и запишем систему в виде системы уравнений:

$$\text{Из } \begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \text{ следует } \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ x = 3 + 5t_2 \\ x = 2 + 3t_3 \end{cases}, \text{ где } t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}.$$

Возьмем $x = 1 + 2t_1$ и подставим в левую часть второго сравнения, тогда получаем:

$$1 + 2t_1 \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow 2t_1 \equiv 2 \pmod 5, \text{ т.е. } t_1 \equiv 1 \pmod 5,$$

из чего следует, что $t_1 = 1 + 5s_1$. Выразим первое уравнение через полученное t_1, поставив $1 + 5s_1$ вместо t_1, в результате получаем: $x = 1 + 2(1 + 5s_1) = 3 + 10s_1$.

Полученный x является решением для двух первых сравнений. Решение получено с периодом 10, и можно заметить, что период равен произведению делителей $m_1 \cdot m_2$, т.е. $2 \cdot 5$.

Если взять $s_1 = 0$, тогда решение будет в диапазоне от 0 до 9. Проверим решение, подставив $s_1 = 0$ в формулу $x = 3 + 10s_1$, получим $x = 3$.

Возьмем x по модулю $m_1 = 2$ и $m_2 = 5$:

$$3 \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2; \quad 3 \equiv 3 \pmod 5.$$

Осталось подставить $x = 3 + 10s_1$ в последнее сравнение $x \equiv 2 \pmod 3$ для получения окончательного результата:

$3 + 10s_1 \equiv 2 \pmod 3 \to 10s_1 \equiv -1 \pmod 3$,
т. е. $s_1 \equiv 2 \pmod 3$, тогда $s_1 = 2 + 3s_2$.

Подставим в формулу x, которую получили на прошлом шаге, значение s_1, получаем: $x = 3 + 10(2 + 3s_2) = 23 + 30s_2$. Заметим, что периодом решения является произведение всех делителей $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$.

При $s_2 = 0$, получим решение в диапазоне от 0 до 29: $x = 23$. Ответ: $x = 23$ — совпал с решением с помощью таблицы 9.

Найдем решение системы сравнений с помощью *конструктивного* подхода. Для этого нужно ввести дополнительные обозначения:

а) Величина M, которая равна произведению всех попарно взаимно простых делителей для данного примера:
$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

б) Величины M_1, M_2, M_3, где каждое M_i равно произведению всех попарно взаимно простых делителей, кроме делителя m_i. Тогда для данного примера M_i равно:
$M_1 = 3 \cdot 5 = 15$; $\quad M_2 = 2 \cdot 5 = 10$; $\quad M_3 = 2 \cdot 3 = 6$.
Тогда одно из решений можно найти по формуле:
$k = r_1M_1y_1 + r_2M_2y_2 + r_3M_3y_3$.

в) Решим дополнительные три сравнения:
$M_1y_1 \equiv 1 \pmod 2$; $\quad M_2y_2 \equiv 1 \pmod 3$; $\quad M_3y_3 \equiv 1 \pmod 5$.
Добавим в данные сравнения конкретные значения:
$15y_1 \equiv 1 \pmod 2$; $\quad 10y_2 \equiv 1 \pmod 3$; $\quad 6y_3 \equiv 1 \pmod 5$.

Решением первого сравнения будет подбор такого числа y_1, которое при умножении на 15 и делении на 2 дает остаток 1, тогда в первом сравнении $y_1 = 1$.

Рассуждая аналогично, получим во втором сравнении $y_2 = 1$, а в третьем $y_3 = 1$.

В данном примере значение $y_i = 1$, однако, в более сложных примерах подбор значений может быть не таким простым, а при достаточно больших значениях M_i и m_i подбор вручную невозможен, и для поиска y_i можно использовать расширенный алгоритм Евклида.

После всех вычислений решение можно найти по формуле:

$k = r_1 M_1 y_1 + r_2 M_2 y_2 + r_3 M_3 y_3$.

В нашем примере k равно

$k = 1 \cdot 15 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 = 53$.

Для того чтобы решение лежало в промежутке от 0 до $M - 1$, возьмем x по модулю M. Как видно из таблиц 8 и 9, таким образом мы найдем первое положительное решение

$x \equiv k \pmod{M}$.

Тогда ответ: $x \equiv 53 \pmod{30} \equiv 23 \pmod{30}$, т. е. $x = 23$.

Ответ совпал с тем решением, которое было получено полным перебором (см. табл. 9).

Запишем решение Китайской теоремы об остатках *в общем виде*:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{m_2} \\ \dots\dots\dots \\ x \equiv r_n \pmod{m_n} \end{cases}.$$

а) Вычислим величину M, которая равна произведению всех попарно взаимно простых делителей, из условия теоремы:

$M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$.

б) Найдем M_i, где каждое M_i равно произведению всех попарно взаимно простых делителей, кроме i-го делителя.

Тогда $M_1 = \dfrac{M}{m_1}$; $M_2 = \dfrac{M}{m_2}$; $\ldots$; $M_n = \dfrac{M}{m_n}$, где m_i — попарно взаимно простые делители при $i = 1, \ldots, n$.

в) Решим n сравнений, т. е. найдем все y_i, такие что:

$$\begin{aligned} &M_1y_1 \equiv 1 \pmod{m_1} \\ &M_2y_2 \equiv 1 \pmod{m_2} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &M_ny_n \equiv 1 \pmod{m_n} \end{aligned}.$$

г) Вычислим x по формуле, учитывая, что $x \equiv k \pmod{M}$, где $k = r_1M_1y_1 + r_2M_2y_2 + \ldots + r_nM_ny_n$, тогда $x \equiv (r_1M_1y_1 + r_2M_2y_2 + \ldots + r_nM_ny_n) \bmod M$.

Китайскую теорему об остатках можно напрямую применить для решения задачи криптографии — разделения секрета. Задачу можно сформулировать так: как разделить секрет между n участниками?

Для того чтобы восстановить первоначальный секрет, необходимы все части секрета. В нашем случае секретом будет число x. Для разделения секрета каждому участнику выдается пара чисел r_i и m_i, назовем их ключами. Чтобы получить секрет, все участники должны соединить все ключи. В такой постановке задачи для разделения секрета можно использовать Китайскую теорему об остатках.

Классическая задача по разделению секрета

Разделить секрет между n генералами, секретом будет пароль от пуска ракет.

Разделим пароль от пуска ракет между четырьмя генералами. По условию задачи паролем будет семизначное число. Так как число семизначное, его нельзя просто разделить (трое получит по два числа, а последний только одно) между генералами. В этом случае нам поможет Китайская теорема об остатках. Для этого каждому генералу нужно запомнить пару чисел:

Генерал I:	34,31
Генерал II:	55,51
Генерал III:	13,06
Генерал IV:	73,27

Первое значение — это число, на которое нужно разделить пароль, чтобы получить второе число — остаток.

Запишем условие задачи аналогично тому, как было написано в примере 2 (с. 372):

$$\text{Так как} \begin{cases} r_i = 31 & m_1 = 34 \\ r_2 = 51 & m_2 = 55 \\ r_3 = 6 & m_3 = 13 \\ r_4 = 27 & m_4 = 73 \end{cases}, \text{ то} \begin{cases} x \equiv 31 \pmod{34} \\ x \equiv 51 \pmod{55} \\ x \equiv 6 \pmod{13} \\ x \equiv 27 \pmod{73} \end{cases}$$

Тогда, найдя число x, мы получим пароль.

Решение

а) Найдем произведение всех попарно взаимно простых делителей M: $M = 34 \cdot 55 \cdot 13 \cdot 73 = 1\,774\,630$.

б) Найдем $M_i = \dfrac{M}{m_i}$:

$M_1 = 55 \cdot 13 \cdot 73 = 52\,195$; $M_2 = 34 \cdot 13 \cdot 73 = 32\,266$;
$M_3 = 34 \cdot 55 \cdot 73 = 136\,510$; $M_4 = 34 \cdot 55 \cdot 13 = 24\,310$.

в) Решим четыре сравнения, т. е. найдем все y_i (с помощью расширенного алгоритма Евклида):

$$\begin{aligned} &52\,195 \cdot y_1 \equiv 1 \pmod{34} &&\Rightarrow 5 \cdot y_1 \equiv 1 \pmod{34} &&\Rightarrow y_1 = 7; \\ &32\,266 \cdot y_2 \equiv 1 \pmod{55} &&\Rightarrow 5 \cdot y_2 \equiv 1 \pmod{55} &&\Rightarrow y_2 = 26; \\ &136\,510 \cdot y_3 \equiv 1 \pmod{13} &&\Rightarrow 10 \cdot y_3 \equiv 1 \pmod{13} &&\Rightarrow y_3 = 4; \\ &24\,310 \cdot y_4 \equiv 1 \pmod{73} &&\Rightarrow y_4 \equiv 1 \pmod{73} &&\Rightarrow y_4 = 1. \end{aligned}$$

г) Вычислим x, учитывая, что $x \equiv k \pmod{M}$,

где $k = r_1 M_1 y_1 + r_2 M_2 y_2 + r_3 M_3 y_3 + r_4 M_4 y_4$,

тогда: $k = 31 \cdot 52\,195 \cdot 7 + 51 \cdot 32\,266 \cdot 26 + 6 \cdot 136\,510 \cdot 4 + {}$ $+ 27 \cdot 24\,310 \cdot 1 = 58\,043\,641$.

$x \equiv 58\,043\,641 \pmod{1\,774\,630} = 1\,255\,481 \pmod{1\,774\,630}$, так как: $58\,043\,641 = 1\,774\,630 \cdot 32 + 1\,255\,481$.

Пароль восстановили, им является число 1 255 481.

Недостаток описанного выше подхода в том, что для восстановления секрета необходимы все части секрета. На практике часто требуется восстановить секрет не с помощью всех, а только с помощью части участников. Для предыдущего примера это значит, что секрет разделяется между n генералами, а для восстановления секрета нужно объединить ключи только k генералов, где $k < n$. Такая схема называется *пороговой схемой разделения секрета.*

Есть две пороговые схемы, основанные на Китайской теореме об остатках: схема Миньотта и схема Асмута — Блума. Также существуют схемы, которые в своей основе для разделения секрета используют другие принципы: схема Блэкли (векторная схема разделения секрета) и схема Шамира (схема интерполяционных полиномов Лагранжа), но это тема уже совсем другой книги...

Шифрование с помощью функциональных зависимостей

1. Опишем алгоритм шифрования с помощью функциональных зависимостей на примере шифрования простого слова КРОСС (бег). Пронумеруем все буквы сокращенного русского алфавита (т. е. буквам е и ё присвоим один номер), причем начнем нумерацию с 0. Запишем соответствия букв и их порядковых номеров в таблицу 10.

А	Б	В	Г	Д	Е, Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Таблица 10

а) По таблице 10 найдем и выпишем номера для каждой буквы слова КРОСС:

К — 10	Для удобства введем	$b_1 = 10$
Р — 16	обозначение номеров	$b_2 = 16$
О — 14	букв:	$b_3 = 14$
С — 17		$b_4 = 17$
С — 17		$b_5 = 17$

б) Для кодирования необходимо случайным образом выбрать натуральное число y_1 и по рекурсивной формуле $y_{n+1} = 4y_n + 25$ найти y_2, y_3, y_4 и y_5.

Для примера выберем $y_1 = 5$, по рекурсивной формуле найдем остальные значения:

$y_2 = 4 \cdot 5 + 25 = 45;$
$y_3 = 4 \cdot 45 + 25 = 205;$
$y_4 = 4 \cdot 205 + 25 = 845;$
$y_5 = 4 \cdot 845 + 25 = 3405.$

Получили:

$$y_1 = 5, \quad y_2 = 45, \quad y_3 = 205, \quad y_4 = 845, \quad y_5 = 3405.$$

в) На последнем этапе шифрования необходимо взять по модулю 32 (мощность алфавита) произведение b_i и y_i, это и будет функциональная зависимость для шифрования каждой буквы слова.

Обозначим за x_n значения, которые получим на этом этапе: $x_n = y_n b_n \pmod{32}$.

Теперь подставим в полученную формулу значения на предыдущих этапах:

$$\begin{aligned}
x_1 &\equiv 10 \cdot 5 \pmod{32} \equiv 18 \pmod{32}\\
x_2 &\equiv 16 \cdot 45 \pmod{32} \equiv 16 \pmod{32}\\
x_3 &\equiv 14 \cdot 205 \pmod{32} \equiv 22 \pmod{32}\\
x_4 &\equiv 17 \cdot 845 \pmod{32} \equiv 29 \pmod{32}\\
x_5 &\equiv 17 \cdot 3405 \pmod{32} \equiv 29 \pmod{32}
\end{aligned}$$, так как

$$\begin{aligned}
50 &= 32 \cdot 1 + \mathbf{18}\\
720 &= 32 \cdot 22 + \mathbf{16}\\
2870 &= 32 \cdot 89 + \mathbf{22}\\
14\,365 &= 32 \cdot 448 + \mathbf{29}\\
57\,885 &= 32 \cdot 1808 + \mathbf{29}
\end{aligned}.$$

После шифрования получаем последовательность:
18, 16, 22, 29, 29.

2. Возьмем другое русское слово — осмысленную последовательность русских букв. Используем для его шифрования последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots$, которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 23$.

   Шифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно табл. 10 и умножалась на y_1. Потом так же заменялась вторая буква и умножаласть на y_2 и т. д. Затем все произведения были заменены остатками от деления на 32 или сравнениями произведений по модулю 32. В результате получилось вот что: **8, 16, 24, 13, 22, 10, 9, 16, 0, 28, 24, 29**. Какое слово было зашифровано?

Напомним таблицу оцифровки алфавита.

А	Б	В	Г	Д	Е, Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Таблица 10

Поясним процесс шифрования, описанный в условии задачи, и разобьем его на этапы.

а) Формируем набор значений y_n по рекурсивной формуле: $\begin{cases} y_{n+1} = 4y_n + 23 \\ y_1 \text{ — выбирается произвольно} \end{cases}$,

где $1 < n \leqslant 12, \quad y_1 > 0$.

Количество y_n зависит от количества букв в слове.

б) Заменяем все буквы слова на их порядковые номера из таблицы 10. Обозначаем их b_n в соответствии с указанными в таблице номерами букв.

в) Перемножаем порядковые номера букв b_n и значения y_n.

г) Сравним по модулю 32 произведения, полученные на предыдущем шаге, в результате чего получаем набор чисел 8, 16, 24, 13, 22, 10, 9, 16, 0, 28, 24, 29.

Для того чтобы ответить на вопрос, какое слово зашифровано, необходимо проанализировать рекурсивную формулу из первого этапа.

Обозначим через x_n числа, полученные в результате кодирования n-й буквы слова ($1 \leqslant n \leqslant 12$).

В задаче шифруется слово, которое состоит из 12 букв. Запишем закодированную последовательность из условия задачи в таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
8	16	24	13	22	10	9	16	0	28	24	29

Таблица 11

Используя введенные выше обозначения, запишем формулу для процесса кодирования n-й буквы слова:

$$x_n \equiv y_n b_n \pmod{32}, \tag{1}$$

где y_n можно найти по рекурсивной формуле.

По условию задачи y_1 выбирается случайно, а для $n > 1$

$$y_{n+1} = 4y_n + 23. \tag{2}$$

Если выбрать $y_1 = 1$ и подставить в формулу (2), можно заметить, что начиная с шага с номером t рекурсивной формулы (2), появляется значение y_t, такое что $y_t \equiv 3 \pmod{32}$. Например, найдем t для $y_1 = 1$:

$y_2 = 4 \cdot 1 + 23 = 27$ $\qquad 27 \pmod{32} \equiv 27 \pmod{32}$
$y_3 = 4 \cdot 27 + 23 = 131$ $\qquad 131 \pmod{32} \equiv 3 \pmod{32}$
$y_4 = 4 \cdot 131 + 23 = 547$ $\qquad 547 \pmod{32} \equiv 3 \pmod{32}$
$y_5 = 4 \cdot 547 + 23 = 2211$ $\qquad 2211 \pmod{32} \equiv 3 \pmod{32}$

Получаем для $y_1 = 1$ $t = 3$. Проверьте это утверждение для других y_1 самостоятельно.

По свойству сравнений 3 для номера буквы $n \geqslant t$ можно написать сравнение, эквивалентное сравнению (1), т. е. подставить вместо y_n число 3:

$$x_n \equiv 3b_n \pmod{32}. \tag{3}$$

Для того чтобы убрать 3 из правой части сравнения (3) и найти b_n, нам необходимо домножить обе части сравнения на число z, чтобы в результате сравнение по модулю 32 произведения 3 и z давало 1. Составим это вспомогательное сравнение:

$$1 \equiv 3z \pmod{32}. \tag{4}$$

В нашем случае значение z легко найти подбором: $z = 11$. В более сложных случаях пришлось бы использовать расширенный алгоритм Евклида.

Теперь возьмем сравнение (3) и домножим обе части на z: $x_n z \equiv 3zb_n \pmod{32}$.

Затем, применив сравнение (4), получаем:

$x_n z \equiv b_n \pmod{32}$. Тогда можно записать:

$$b_n \equiv x_n z \pmod{32}. \tag{5}$$

Найдем все b_n, используя сравнение (5), подставив значение $z = 11$. Начнем в обратном порядке:

$$\left.\begin{array}{l}
b_{12} \equiv 29 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 31 \pmod{32} \\
b_{11} \equiv 24 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 8 \pmod{32} \\
b_{10} \equiv 28 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 20 \pmod{32} \\
b_9 \equiv 0 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 0 \pmod{32} \\
b_8 \equiv 16 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 16 \pmod{32} \\
b_7 \equiv 9 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 3 \pmod{32} \\
b_6 \equiv 10 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 14 \pmod{32} \\
b_5 \equiv 22 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 18 \pmod{32} \\
b_4 \equiv 13 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 15 \pmod{32} \\
b_3 \equiv 24 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 8 \pmod{32} \\
b_2 \equiv 16 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 16 \pmod{32} \\
b_1 \equiv 8 \cdot 11 \pmod{32} \equiv 24 \pmod{32}
\end{array}\right. \text{, т. к. }
\begin{array}{l}
319 = 32 \cdot 9 + \mathbf{31} \\
264 = 32 \cdot 8 + \mathbf{8} \\
308 = 32 \cdot 9 + \mathbf{20} \\
0 = 32 \cdot 0 + \mathbf{0} \\
176 = 32 \cdot 5 + \mathbf{16} \\
99 = 32 \cdot 3 + \mathbf{3} \\
110 = 32 \cdot 3 + \mathbf{14} \\
242 = 32 \cdot 7 + \mathbf{18} \\
143 = 32 \cdot 4 + \mathbf{15} \\
264 = 32 \cdot 8 + \mathbf{8} \\
176 = 32 \cdot 5 + \mathbf{16} \\
88 = 32 \cdot 2 + \mathbf{24}
\end{array}$$

Запишем результаты в таблицу 12 и сопоставим численные значения буквам с помощью таблицы 10.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
Значения b_i	24	16	8	15	18	14	3	16	0	20	8	31
Буквы	Ш	Р	И	П	Т	О	Г	Р	А	Ф	И	Я

Таблица 12

По условию задачи зашифровано осмысленное русское слово, а получилось слово «шриптография», поэтому необходимо подобрать подходящую первую букву. Подставив букву «к» вместо буквы «ш», получим слово «криптография».

Проверим правильность ответа.

Буква «к» в таблице 10 имеет *номер 10*, т. е. $b_1 = 10$. Подставим значения x_1 и b_1 в формулу (1): $8 \equiv y_1 \cdot 10 \pmod{32}$, где $x_i \equiv y_i \cdot b_i \pmod{32}$.

Решение сравнения можно найти подбором, одним из решений будет $y_1 = 4$. Подставим y_1 в рекурсивную формулу (2) и найдем y_2, y_3, y_4 и y_5 и проверим закономерность, которую указали выше: начиная с шага номер t рекурсивной формулы (2) появляется значение y_t, такое что $y_t \equiv 4 \pmod{32}$:

$$
\begin{array}{ll}
y_2 = 4 \cdot 4 + 23 = 39 & 39 \pmod{32} \equiv 7 \pmod{32} \\
y_3 = 4 \cdot 39 + 23 = 179 & 179 \pmod{32} \equiv 19 \pmod{32} \\
y_4 = 4 \cdot 179 + 23 = 739 & 739 \pmod{32} \equiv 3 \pmod{32} \\
y_5 = 4 \cdot 739 + 23 = 2979 & 2979 \pmod{32} \equiv 3 \pmod{32}
\end{array}.
$$

Получили такой набор значений y_i по модулю 32:

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 7, \quad y_3 = 19, \quad y_4 = 3, \quad y_5 = 3.$$

Такой результат несколько противоречит ожиданиям, так как в решении подбиралась только первая буква слова из-за того, что y_1 выбирался случайным образом. Ожидалось, что все $y_1 \pmod{32} \equiv 3 \pmod{32}$ для $i > 0$.

Однако не стоит делать поспешных выводов. Попробуем найти x_i из полученных y_i и b_i при помощи формулы (1):

$$
\begin{array}{l}
x_1 \equiv 4 \cdot 10 \pmod{32} \equiv 8 \pmod{32} \\
x_2 \equiv 39 \cdot 16 \pmod{32} \equiv 16 \pmod{32} \\
x_3 \equiv 179 \cdot 8 \pmod{32} \equiv 24 \pmod{32} \\
x_4 \equiv 739 \cdot 15 \pmod{32} \equiv 13 \pmod{32} \\
x_5 \equiv 2979 \cdot 18 \pmod{32} \equiv 22 \pmod{32}
\end{array}.
$$

Значения x_i совпадают со значениями из таблицы 11, хотя все b_i, кроме первого, взяты из конечной таблицы 11, т. е. из решения, и b_i посчитаны с помощью эквивалентной формулы (3).

Оказывается, что подставив $y_2 = 7$ и $y_2 = 3$ в формулу (1), в обоих случаях получаем $x_2 = 16$ и аналогично, подставив $y_3 = 19$ и $y_3 = 3$, получаем $x_3 = 24$.

Итак, проверка показала, что ответ корректный.

Краткая историческая справка о шифрах

Подстановочный шифр — это шифр, в котором шифрограмма получается в результате некоторой подстановки вместо символов исходного текста символов, выбранных из символов исходного текста или другого алфавита.

Классификация

Одноалфавитный шифр подстановки — шифр, при котором каждый символ открытого текста заменяется на некоторый фиксированный при данном ключе символ того же алфавита (например, шифр Цицерона, шифр простой замены).

Однозвучный шифр подстановки — похож на одноалфавитный, за исключением того, что символ открытого текста может быть заменен одним из нескольких возможных символов (например, книжный шифр).

Программный шифр подстановки — заменяет не один символ, а целую группу (например, шифр Плейфера).

Полиалфавитный шифр подстановки — состоит из нескольких шифров простой замены (например, шифр Виженера).

Со времен Спарты был также известен способ шифрования, использовавший табличку-линейку Энея (Эней Тактик — полководец IV века до н. э.). Известна его работа «О перенесении осады». Суть способа в том, что на табличке-линейке располагались буквы алфавита в определенном порядке. На линейку в определенном порядке наматывалась нить с узелками на разных расстояниях между буквами. Эти расстояния впоследствии и составляли секрет шифровки и расшифровки послания, так как получателям шифровки гонцы доставляли нить с узелками.

Отметим, что Эней был первым в создании методов скрытия информации — стеганографии. Этот метод ввел позже немецкий ученый Иоганн Тритемий в 1499 году в книге «Стеганография». Сегодня это наука о скрытой передаче информации различными способами, причем обязательно скрытие самого факта передачи информации.

Известен случай, описанный Геродотом (V век до н. э.) в хронике войны между греками и персами. Тиран города Милета Гистией приказал побрить гонцу голову и на ней написать секретное сообщение. После того как у гонца выросли волосы, его послали к Аристагору, который сбрил гонцу волосы и прочитал долгожданное сообщение.

Отметим, что Коран состоит из 114 глав, иначе говоря, откровений пророка Мухаммеда. Отрывочный характер глав породил необходимость точной датировки их написания. Большое значение для более или менее точного определения времени написания ученые-кop ановеды того времени уделили частоте появления новых слов в записи.

Так родился *частотный анализ*. Впервые об этом написал математик, философ, кoранoвед Аль-Кинди из Багдада в книге «О дешифровке криптографических сообщений». Время написания — середина IX века.

Существенно позже, в 1466 г., кардинальное средство защиты от частотного анализа разработал известный математик и архитектор Леон Баттиста Альберти (1404–1472). Идея нового шифрования состояла в использовании двух и более шифроалфавитов.

На практике известен диск Альберти. Это устройство состояло из двух и более концентрических кругов: один — фиксированный, с буквами, выгравированными на нем, другие — подвижные, с буквами алфавита. Отправитель, поворачивая подвижный диск на определенное число позиций, шифровал послание, весьма устойчивое к частотному анализу. Отметим, что такое устройство с одним подвижным диском со стандартным алфавитом есть по сути шифр Цезаря, использовавшийся даже в период Гражданской войны в США.

Напомним заслуги французского математика Франсуа Виета (1540–1603) не только как основателя алгебры, но и как талантливого криптоаналитика. Франсуа был сыном королевского прокурора, дружившего с герцогом Анжуйским, будущим королем Франции Генрихом III (1551–1589). И во время войны Испании и Нидерландов с Францией Ф. Виет в 1580 г. был назначен рекетмейстером — чиновником, имеющим право именем короля контролировать распоряжения короля и приостанавливать приказы крупных феодалов.

Находясь на государственной службе, он знакомился с перехваченной перепиской короля Испании с его агентами-представителями в Нидерландах. Шифр депеш был очень сложен, так как содержал более пятисот символов. И все же Франсуа его расшифровал, что позволило Франции выиграть эту войну. После окончания войны король Испании Филипп II узнал о том, что вся переписка его с Нидерландами была расшифрована. Он обратился с жалобой к Папе Римскому на то, что это было сделано с использованием дьявольской силы. В своем послании французскому королю Папа изложил жалобу испанского короля и попросил объясниться. В ответ в Рим был послан Ф. Виет, который объяснил узкому кругу ватиканских криптографов некоторые принципы расшифровки, после чего был награжден и отпущен домой.

Отметим также, что Джон Валлис (1616–1703), английский математик, по книгам которого учился и которого считал своим учителем Исаак Ньютон (1642–1727), во время гражданской войны между сторонниками абсолютной монархии и приверженцами парламента неоднократно расшифровывал секретную переписку сторонников короля. В результате в Англии в 1649 году утвердилась конституционная монархия.

Известно, что Мария Стюарт, королева Шотландии в 1687 г. была казнена. Одной из причин стала расшифровка переписки Марии с Энтони Бабангтоном, которые пользовались шифрами, ненадежными с точки зрения частотного анализа, известного Томасу Фелиппесу — криптоаналитику королевы Елизаветы I.

Уже более чем за сто лет до этого немецким математиком Иоганном Тритемием и французским ученым, дипломатом и криптографом Блезом де Виженером вновь был открыт полиалфавитный шифр, весьма устойчивый к частотному анализу.

Свои исследования Виженер опубликовал в 1585 году. Книга называлась «Трактат о шифрах».

Шифр Виженера продержался почти три столетия, пока английский математик Чарльз Беббидж (1791–1871) в 1854 году его не взломал. Беббидж — создатель первого в мире механического компьютера. Увы, Чарльз в открытой печати поздно заявил о своем открытии. В 1853 году Фридрих Кеспери, прусский военный офицер, опубликовал свой метод расшифровки полиалфавитного шифра, как оказалось позже, аналогичный методу Беббиджа.

Известны и другие шифры, которые в течение более трехсот лет были криптоустойчивы. Например, «Великий шифр» Короля-Солнце Людовика IV (1638–1715). Его создали отец и сын Антуан и Бонавентура Россиньоль, обладавшие выдающимися криптографическими способностями. Только лишь в 1890 году специалист по криптографии Этьен Базери после многих лет нелегкой работы расшифровал секретные послания Короля-Солнце.

Идеи Ч. Беббиджа не пропали даром. В 1918 году немецкий инженер Артур Шербиус запатентовал машину для защищенной связи. Она называлась «Энигма». Несмотря на сложность, «Энигма» по своей сути являлась улучшенной версией диска Альберти. Со временем после известных технологических преобразований «Энигма» стала основным средством шифровки в нацистской Германии.

История расшифровки кода «Энигмы» — удивительный детектив с участием разведок Польши, Англии, Советского Союза и США. В значительной мере решающую роль сыграл гений английского математика Алана Тьюринга (1912–1954), являющегося отцом современной вычислительной техники. Именно для вскрытия кода «Энигмы» был разработан компьютер — вычислительная машина, названная «Colossus».

Неоценим вклад российских дешифровальщиков в победу российских войск в войне 1812 года. Благодаря им, вся переписка Наполеона с его маршалами и генералами, попавшая в руки разведчиков и партизан, была прочитана. Александр I чрезвычайно высоко оценил их вклад в победу.

В 1832 году Павел Львович Шиллинг фон Канштадт, известный ученый математик — глава криптографической службы России, первым в мире использовал телеграф собственной конструкции. С этого началась принципиально иная пора в организации связи. До сих пор основная часть информации передается по каналам электротехнической и электронной связи.

Дальнейшее развитие криптографии и криптоаналитики и ее новых применений в науке, технике и связи не могло обойтись без гениальных работ математика из США Клода Элвуда Шеннона (1916–2001), основоположника теории информации. Впервые в 1948 году в статье «Математическая теория связи» он рассматривал вопрос, как надежнее зашифровать текст, чтобы при его передаче не произошло потери информации. В статье Шеннон пришел к выводу, что нельзя создать шифр, который предотвратит потерю информации. Позже ученый из США Ричард Хэмминг (1915–1998) создал метод обнаружения и, что самое важное, исправления ошибок.

Содержание

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.
По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.
Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.
Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.
Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения.
12. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Часть 3. Графическое решение уравнений и систем уравнений с параметром.
13. Уравнения и неравенства с параметрами.
14. Задачи с параметрами на экзаменах.
15. Введение в математический анализ.
16. Комплексные числа.
17. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
18. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
19. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.
20. Доказательства неравенств. Математическая индукция. Теория сравнений. Введение в криптографию.